



TITLE:

平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析的研究(
Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

高瀬, 冬人

CITATION:

高瀬, 冬人. 平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析的研究. 京都大学, 1986, 工学博士

ISSUE DATE:

1986-05-23

URL:

<https://doi.org/10.14989/doctor.k3558>


RIGHT:



平均ポテンシャルを用いた

多自由度発振器の解析的研究

1986年4月



高瀬冬人

平均ポテンシャルを用いた

多自由度発振器の解析的研究

1986年4月

DOC
1986
1
電気系

高瀬冬人

目 次

1. まえがき	1
1.1 研究の背景と意義	1
1.2 内容のあらまし	2
2. 平均ポテンシャルを用いた解析法	7
2.1 まえがき	7
2.2 Brayton-Moserの理論	7
2.3 平均ポテンシャルと平均化方程式	9
2.4 むすび	15
3. 3次特性の能動素子を用いた発振器	16
3.1 まえがき	16
3.2 2次形式の極値問題	16
3.3 3次特性の能動素子を用いた発振器の基本的性質	18
3.4 1個の能動素子を用いた発振器	22
3.5 複数個の能動素子を用いた発振器	23
3.5.1 系の記述	23
3.5.2 2個の能動素子をもつ系	24
3.5.3 N 個の能動素子をもつ系	27
3.6 能動素子を全段に含むはしご状発振器	28
3.6.1 系の記述と平均ポテンシャル	29
3.6.2 モードの安定性	31
3.7 能動素子を部分的に含むはしご状発振器	33
3.8 むすび	35
4. 5次特性の能動素子を用いた発振器	36
4.1 まえがき	36
4.2 1個の能動素子を用いた発振器	36
4.2.1 系の記述と平均ポテンシャル	36

4.2.2	m 重モード振動の安定判別	38
4.2.3	平均ポテンシャルの等高線図	41
4.3	はしご状発振器	42
4.3.1	5次特性の能動素子をもつはしご状発振器	42
4.3.2	系の記述	43
4.3.3	満場一致原理に基づく振動状態の予測	45
4.3.4	単一モード振動の安定性	47
4.3.5	2重モード振動の安定性	47
4.3.6	3重モード振動の安定性	49
4.4	むすび	49
5.	印加電圧の分布関数を用いた多重モード振動の発生機構の説明	51
5.1	まえがき	51
5.2	分布関数の考え方	52
5.2.1	分布関数を用いた平均化の解釈	52
5.2.2	停留電圧	53
5.3	非同期多重モード振動の分布密度関数	54
5.4	1個の能動素子を用いた発振器の一般的性質	55
5.4.1	同期外れの公式	55
5.4.2	1個の能動素子を用いた発振器の一般的性質	57
5.5	2自由度系の振動の分布密度関数	57
5.6	能動素子の特性が7次式で表される発振器	60
5.6.1	7次式で表される素子特性	60
5.6.2	平均ポテンシャルの導出	61
5.6.3	不等振幅2重モード振動の解析	61
5.7	能動素子特性が正弦関数で表される発振器	63
5.7.1	原点付近が正抵抗の場合	63
5.7.2	原点付近が負性抵抗の場合	65
5.8	むすび	66

6. 整数比の固有周波数間の同期現象	68
6.1 まえがき	68
6.2 同期波形の予想	68
6.2.1 電圧分布に注目した平均化操作の解釈	69
6.2.2 同期による波形整形作用	69
6.3 2自由度系の同期現象	70
6.3.1 能動素子特性が3次式で表される場合	71
6.3.2 能動素子特性が5次式で表される場合	72
6.4 $1:3:5:\cdots:(2M-1)$ 同期振動	76
6.4.1 方形波近似波形	77
6.4.2 有限フーリエ級数の極値の個数	78
6.4.3 記号列による波形の表現	78
6.4.4 シミュレーション	79
6.5 偶数次の固有周波数を含む場合	82
6.6 能動素子特性が非対称な場合	84
6.7 むすび	85
7. 急峻な飽和特性の能動素子を用いた発振器	86
7.1 まえがき	86
7.2 急峻な飽和特性の能動素子を用いた発振器	86
7.2.1 高次多項式特性の能動素子と平均ポテンシャル	87
7.2.2 リミター特性の能動素子と平均ポテンシャル	88
7.2.3 凹2次計画問題とその解法	90
7.3 1個の能動素子をもつ発振器	92
7.4 2個の能動素子をもつ発振器	94
7.5 はしご状発振器	97
7.6 むすび	101

8. 平均ポテンシャルの非線形復元力をもつ自励振動系への拡張	103
8.1 まえがき	103
8.2 非線形保存系を生成系とする系への平均ポテンシャルの拡張	103
8.3 硬い発振特性をもつ Duffing-van der Pol 発振	108
8.3.1 生成系の波形と安定限界	108
8.3.2 復元項が単項式で表される硬い発振現象	109
8.4 むすび	110
9. むすび	112
謝 辞	115
参 考 文 献	116
付 録	120
A. 平均ポテンシャルの導出 (2 章)	121
B. 多重モード振動の上限則の証明 (3 章)	122
C. 非共振平均化の公式 (4 章)	124
D. 1 個の能動素子を用いた発振器の一般的性質 (I)~(II) の証明 (5 章)	126
E. 伝送線路のインピーダンス (6 章)	129
F. 定理 2 (7.2.3 節) の証明 (7 章)	130
G. 1 個の能動素子をもつ発振器における多重モード振動の不安定性 (7 章)	132

1. ま え が き

1.1 研究の背景と意義

本研究は、多自由度発振器に生じる振動の新しい解析法として、平均ポテンシャル関数を用いる方法を提案し、これを用いた解析例を示す。

多自由度の負性抵抗発振器の研究は、van der Pol⁽¹⁾以来、数多く行なわれてきた。最近では、回路の集積化と関連して、大規模に配列された発振器群に生じる振動モードの研究があり、ある種の記憶素子、パターン認識等への応用の可能性が示唆されている。⁽²⁾これらの研究に続き、多数の発振器を様々に結合した系の解析も行なわれている。^{(3), (4)}一方、内部共振による同期振動の発生条件、^{(5), (6), (7)}能動素子が5次特性の場合、⁽⁸⁾サーミスタを含む発振器等⁽³⁰⁾の研究もある。

これらの発振器に生じる現象は多岐にわたり複雑であるが、関心をもたれてきた現象を整理すると、次の2点にまとめられる。

- (1) 複数列の固有周波数が近いとき、これらの周波数成分が互いに同期化する相互同期現象。
- (2) 複数列の周波数成分が同時に発生する多重モード振動。周波数の間に特殊な関係が成り立つ共振の場合に生じる同期多重モード振動と、非共振の場合に生じる非同期多重モード振動に区別される。

これらの現象の解析法として、平均化法とシミュレーションによる方法が用いられてきた。

平均化法は、van der Polに始まり、Bogoliuboff等⁽⁹⁾によって基礎づけられた方法である。この方法では、発振回路を記述する微分方程式から、非線形減衰項が小さい（弱非線形）という条件の下で平均化方程式を導き、平衡点とその安定条件を求める。元の非線形系の周期解は、平均化方程式の平衡点に対応するから、比較的簡単な計算で、元の系の周期解の存在や安定性を調べることができる。また、平均化方程式は、振動系に保存されている振動エネルギーの増減を表すという物理的意味をもっている。

平均化法は、弱非線形振動系の汎用の解析手法である。そこで、逆に言えば、本研究の対象とする多自由度発振器の物理的背景を十分活かしていないことになる。例えば、各自由度に対する平均化方程式は、自由度毎に導出しなければならず、方程式群としての意味は明らかにされていない。このため、少し複雑な系に対しては、その計算は煩雑となり、実用上、平均化法の適用限界が存在する。

一方、近年の計算機の発達に伴い、シミュレーションによって具体的な系に対する解を得ることは容易になってきた。この方法によれば、ある固定された系の解を得ることは容易

である。しかし、非線形系に生じる現象は複雑であり、ある系に対してシミュレーションデータを蓄積しても、少し異なる系の現象の予測には役立たぬことも多い。

このため、シミュレーションを補う方法として、現象を定性的ではあっても、簡単に把握でき、現象の発生機構を物理的・統一的に説明できる方法が必要となる。

本研究は、多自由度発振器という系の物理的背景をより深く利用することにより、物理的・統一的な視点を与える解析手法を提案すること、およびその解析例を示すことを目的とする。すなわち、本研究の方法によれば、平均ポテンシャルと呼ぶスカラー関数によって多自由度発振器の平均化方程式が導かれ、平均化法と同等の結果を簡単に得ることができる。さらに、系の安定な現象が平均ポテンシャルの極小点に対応することから、多自由度発振器に生じる広範な現象を、物理的・統一的に解釈することができる。そして、細い計算を始める前に、系に生じる現象の定性的な性質を予測できる能力を与え、応用や設計に役立てることができる。

1.2 内容のあらまし

本研究では、2端子能動素子（負性抵抗素子）により駆動されるLC発振器を考察の対象とする。

2章では、本研究の基本原理である損失分極小化原理を説明する。BraytonとMoserにより導入された回路の混合ポテンシャル⁽¹⁰⁾に、平均化法を適用し、系内の電圧ポテンシャルおよび電流ポテンシャルの時間平均である平均ポテンシャルを定義する。電圧ポテンシャル、電流ポテンシャルは、回路の散逸関数であり、線形の抵抗に対しては、損失（Ohmic loss）を表す。非線形抵抗に対しては、これらは厳密には損失を与えるものではないが、線形抵抗の場合の類推から、以下これらを「損失分」と呼ぶことにする。

平均ポテンシャルを用いると、従来の平均化方程式は特殊な場合を除いて、平均ポテンシャルの勾配系で表現できる。したがって、安定平衡点は、平均ポテンシャルの極小点、すなわち損失分の極小点として与えられる。これより、系に生じる振動の解析は、平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求めるという問題に帰着される。

3～7章では、平均ポテンシャルを用いていくつかの回路の解析を行う。まず、前半3～5章では、取り扱いが比較的簡単である、系の固有周波数間に特殊な関係がない非共振の場合について考察する。

3章では、能動素子が3次式で表される軟発振特性をもつ系を、一般的な形で取り上げ、系に生じる単一モード振動、非同期多重モード振動を考察する。この系では、平均ポテンシ

ャルは振幅の2乗の2次形式として表される。このことを用いて、非同期多重モード振動の発生の方に関するいくつかの一般的法則を導く。また、系に生じる非同期多重モード振動をすべて求めるアルゴリズムを示す。さらに、1個の能動素子を用いた系の平均ポテンシャルについて考察し、1個の能動素子の性質から、はしご状発振器のような多数の能動素子を用いた系の振舞いを説明する「満場一致原理」を導入する。

次に、4章では、能動素子が5次式で表される硬発振特性をもつ系を考察する。この場合、1個の能動素子を用いた系では、単一モード振動と多重モードの両方が平均ポテンシャルを極小とする。1個の能動素子のこの性質より、はしご状発振器の振舞いを説明する。

このように考えると、1個の能動素子の複数個の周波数に対する振舞いを説明することが問題点として残る。そこで、5章では、平均ポテンシャルを導く際の平均化操作に注目して、この問題点を解決する。すなわち、複数個の周波数成分に対する平均化操作を、能動素子への印加電圧の時間的分布密度関数を用いて表現する。その結果を用いて、軟発振特性の能動素子1個を用いた発振器では、非同期2重モード振動は不安定であるが、硬発振特性の素子を用いた系では、これが安定に生じる理由を説明する。

以上、3～5章では、系の固有周波数に簡単な関係がない非共振の場合を扱った。しかし、固有周波数間に簡単な関係がある場合には内部共振を生じ、同期多重モード振動が発生することがある。6章では、このような同期振動について考察する。この場合、内部共振の効果を表す項が付け加わるために、平均ポテンシャルは複雑な形式となり、その極小点を見出すことは困難である。

そこで、平均ポテンシャル法の基本である損失分極小化原理に立ち帰って考える。能動素子の立場から考えると、損失分を最小とするために最も望ましい入力電圧値がある。したがって、いくつかの適当な周波数成分を用意すれば、それらが同期して望ましい電圧付近に長時間留まるような特徴ある波形が生じ、損失分を極小化することが予想される。

実際に、いくつかの場合に、そのように整形された同期波形が生じることを示す。典型例として、固有周波数比1:3:5:……の場合の同期波形は、方形波の近似波形となることを述べる。また、これらの波形を記号列を用いて予測し、すべての同期振動を能率よく発生させるシミュレーション法についても述べる。

5, 6章の考察は、数学的に厳密ではなく、定性的、直観的な部分を含んでいる。しかし、そのために、能動素子の特性が多少変化しても、それが定性的に大きく変らない限り、これらの現象が大きく変らないことが確信できる。3, 4章では、能動素子特性を表現するのに、最も簡単に軟発振特性は3次式で、硬発振特性は5次式で、それぞれ表現した。しかし、実

際の素子特性は、これらの特性よりも急峻な飽和を示すものが多い。そこで、7章では、能動素子特性が定性的に同じ形であるが、飽和が急峻である場合に、系に生じる現象がどの程度、変化するかを調べる。

その結果、1個の能動素子を用いた発振器に生じる非同期振動のような単純な現象は、飽和特性の急峻さには無関係であるが、はしご状発振器のように多くの能動素子を含んだ複雑な系に生じる振動現象は、飽和特性の急峻さにより変化することがわかる。したがって、このような多くの能動素子を含む系を解析する時には、素子特性のモデリングをもっと正確に行う必要がある。

最後に、8章では、平均ポテンシャルを非線形復元力をもつ系へ拡張する。一般に、非線形振動系は、復元項と減衰項に非線形性を含みうる。これまで、平均ポテンシャル法では、非線形性は減衰項のみに含まれ、復元項は線形であると仮定してきた。8章では、復元項にも非線形性が含まれる系の一例として、非線形インダクターをもつ1自由度系に、平均ポテンシャル法を拡張して適用する。この結果、復元項が単項式の場合には、平均ポテンシャルが拡張できることを示す。

図1.1に、各章の内容の関係を示す。本研究の対象とする多自由度発振器に生じる現象は、次の観点から分類できる。

(1) 固有周波数間の関係

- ・共振の場合（固有周波数間に、簡単な整数を係数とする1次従属関係が存在する）。
- ・非共振の場合（固有周波数間に従属関係が存在しない）。

(2) 能動素子の特性

- ・軟発振3次式、硬発振5次式、高次多項式、リミター特性 等

(3) 能動素子の個数

- ・1個の場合
- ・複数個の場合（はしご状発振器 等）

本研究は、このすべての組合せを網羅したものではないが、損失分極小化原理(2章)を用いて、系に生じる現象の統一的説明を試みる。まず、能動素子を1個用いた発振器については、分布密度関数を用いた平均化操作の解釈(5章)から、非共振(5章)、共振(6章)、能動素子の特性に拘らず、現象が統一的に説明される。これに対して、能動素子が多数個用いられている発振器の振舞いについては、能動素子1個の性質から、満場一致原理(3章)に従って定性的な説明ができる。定量的には、数式表現が簡単な非共振の場合のみを扱っている(3, 4, 7章)。

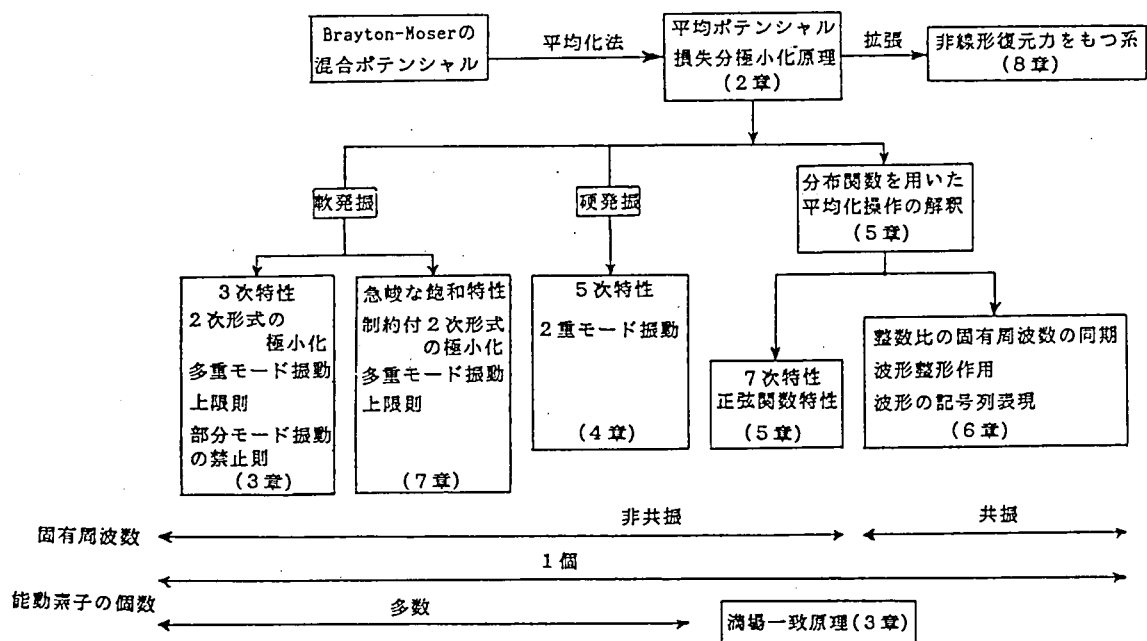


図 1.1 各章の関係

記 号 表

B_i	: 回路内で電流の定まる枝の集合 (2.2 節)
B_v	: 回路内で電圧の定まる枝の集合
d	: 注目している振動に対し, 外乱として働らくモードの添字
d_{mq}, d'_{mj}	: モード m の, 枝 L_q, C_j に対する分配比 (2.9) 式
$F(i)$: 電流ポテンシャル (2.2 節)
$G(v)$: 電圧ポテンシャル
$H(i, v)$: ループポテンシャル
J	: キャパシタの個数 (2 章)
j	: キャパシタの添字 (2 章), および一般的な添字
K	: インダクタの個数
k	: 抵抗, 能動素子の添字, および一般的な添字
M	: 回路の自由度
m, l	: モードの添字
n_m	: 線形系の固有周波数
N	: 回路内の抵抗, 能動素子の総数
$P(i, v)$: 混合ポテンシャル
P_{mk}	: モード m の, 能動素子 k に対する分配比
P_1, P_2	: モードの形状を表す指数 (3.41) 式
q	: インダクタの添字
r_m	: モード m の振幅
$R_m = r_m^2$: モード m の振幅の 2 乗
t	: 時間
$U(r, \theta)$: 平均ポテンシャル
V	: 電圧
v	: 規格化電圧
$W(V; r, \theta)$: V の分布密度関数
μ	: 微小パラメータ

2. 平均ポテンシャルを用いた解析法

2.1 ま え が き

本章では、BraytonとMoserの導入した混合ポテンシャルを用いて、系全体の損失分の時間平均を表す平均ポテンシャルを定義し、これを用いて平均化方程式を導く。この結果、平均化方程式は平均ポテンシャルの勾配系として表現されること、したがって、安定な平衡点が平均ポテンシャルの極小点で与えられることを示す。これにより、系の解析は平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求めるという問題に帰着する。

2.2 Brayton - Moser の理論

非線形 RLC 回路が与えられた時、それを表現する微分方程式を導く方法のひとつに、Brayton と Moser の混合ポテンシャル⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ を利用する方法がある。この理論を、平均ポテンシャルの構成に必要な範囲で紹介する。

回路は、 K 個の線形インダクタンス L_q ($q = 1, \dots, K$) と、 J 個の線形容量 C_j ($j = 1, \dots, J$) および、 N 個の線形または非線形の抵抗により構成されているとする。定電圧源あるいは定電流源も一種の非線形抵抗と考えておく。なお、原論文は、一般に非線形の L および C にも適用できる形で書かれているが、ここでは簡単のため、 L および C を線形の場合に限定する。

L_q を流れる電流、 C_j の電圧を各々 i_q 、 v_j と書く。これら $K+J$ 個の変数がキルヒホフの法則に反することなく、回路の状態変数に選べるためには、次の 2 条件が必要である。

- (1) L および電流源からなるカットセットが存在しない。
- (2) C および電圧源からなるループが存在しない。

この条件を満たすとき、回路内のすべての抵抗枝は次の 3 種類に分類される。

- (1) L_q の電流 i_q から、キルヒホフの電流則により枝電流の決まる抵抗枝の集合 B_i 。言い換えると、 B_i の枝は、いくつかの L のみとカットセットをなす。
- (2) C_j の電圧 v_j から、キルヒホフの電圧則により枝電圧の決まる抵抗枝の集合 B_v 。言い換えると、 B_v の枝は、いくつかの C のみとループをなす。
- (3) B_i にも B_v にも分類されない抵抗枝。

すべての抵抗枝が B_v か B_i のいずれかに分類されるとき、回路は完全 (complete) であるという。完全でない回路は、適当な箇所小さな L' 、 C' を挿入することにより完全回路にできる。この完全回路から微分方程式を導いた後、 L' 、 C' を 0 とすればよいから、以下では回路

が完全な場合を考える。

まず、抵抗素子の電流ポテンシャルと、電圧ポテンシャルを、抵抗特性に沿った次の積分で各々定義する。

$$\begin{aligned} F(i) &= \int v \, di \\ G(v) &= \int i \, dv \end{aligned} \quad (2.1)$$

これらは、図 2.1 の斜線部の面積にあたり、電力の次元をもつ。原論文とは逆に、抵抗の電圧と電流を慣用に従った方向にとる。普通の線形抵抗 $R > 0$ では、 $v = Ri$ であるから、

$$\begin{aligned} F(i) &= \int v \, di = \frac{1}{2} Ri^2 \\ G(v) &= \int i \, dv = \frac{1}{2R} v^2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

となり、 F 、 G は消費電力の半分となる。

さて、 K 個の電流、 J 個の電圧の関数として、混合ポテンシャル P を次のように定義する。

$$\begin{aligned} P(i_1, \dots, i_K, v_1, \dots, v_J) \\ = -F(i_1, \dots, i_K) + G(v_1, \dots, v_J) + H(i_1, \dots, i_K, v_1, \dots, v_J) \end{aligned} \quad (2.3)$$

あるいは、

$$P(i, v) = -F(i) + G(v) + H(i, v) \quad (2.4)$$

ただし、 $F(i)$ は B_i に含まれる全抵抗枝の電流ポテンシャルの和、 $G(v)$ は B_v に含まれる全抵抗枝の電圧ポテンシャルの和である。 $H(i, v)$ はループポテンシャルと呼ばれ、 C と B_v より成る部分回路から、 L と B_i より成る部分回路へ流れる電力を表す量であり、次のように構成する。ひとつのインダクタ L_q といくつかの C 及び B_i の枝で作られるループを考える。この中の C の電圧を、方向を考えて加えた和は次のように書ける。

$$\sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} v_j \quad (\text{ただし, } \Gamma_{qj} = 0, \pm 1) \quad (2.5)$$

これに、 L_q を流れる電流 i_q を乗じ、すべての L について総和するとループポテンシャルとなる。

$$H(i, v) = \sum_{q=1}^K \sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} i_q v_j \quad (2.6)$$

(2.3) 式で定義した混合ポテンシャル P を用いると、回路の状態方程式は次式で与えられ

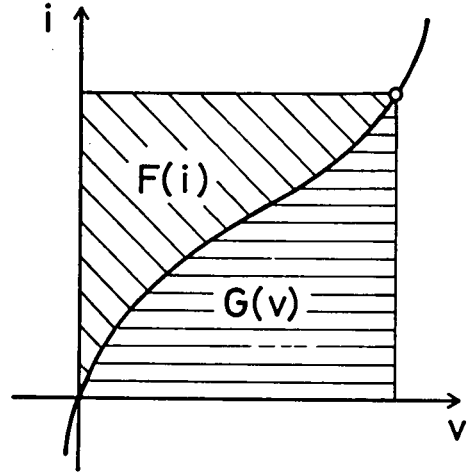


図 2.1 電圧ポテンシャルと電流ポテンシャル

る。

$$L_q \frac{d i_q}{d t} = \frac{\partial P}{\partial i_q} = -\frac{\partial F}{\partial i_q} + \sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} v_j \quad (q = 1, \dots, K)$$

$$C_j \frac{d v_j}{d t} = -\frac{\partial P}{\partial v_j} = -\frac{\partial G}{\partial v_j} - \sum_{q=1}^K \Gamma_{qj} i_q \quad (j = 1, \dots, J) \quad (2.7)$$

なお、(2.7)式は、解析力学における Hamilton の正準方程式

$$\frac{d q_r}{d t} = \frac{\partial H}{\partial P_r}$$

$$\frac{d P_r}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial q_r}$$

(P_r は一般化運動量、 q_r は一般化座標) と一見類似しているが、同じ形式ではない。また、力学の Hamilton H は、保存されるエネルギーを表すが、混合ポテンシャル P は、系内を動くパワーを示すという点でも両者は異なる。

2.3 平均ポテンシャルと平均化方程式

回路が弱非線形(微小損失)である場合、(2.7)式から平均化方程式を導くことを考える。回路は、次の3条件を満たすと仮定する。

(i) 回路内の抵抗素子(線形または非線形)は、抵抗が微小であるか、またはコンダクタンスが微小である。

(ii) 回路は完全(complete)である。

(iii) 微小抵抗の抵抗枝は B_i に分類され、微小コンダクタンスの抵抗枝は B_v に分類される。

(i)の条件が成立していれば、適当な微小 L 、 C を挿入することにより、(ii)、(iii)の条件を成立するようにできる。挿入した L 、 C を寄生素子と呼ぶことにする。

微小抵抗を短絡、微小コンダクタンスを開放した無損失線形系を生成系(generating system)と考える。これは、(2.7)式で $F(i)=G(v)=0$ とおいた次式となる。

$$L_q \frac{d i_q}{d t} = \frac{\partial H}{\partial i_q} = \sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} v_j \quad (q = 1, \dots, K)$$

$$C_j \frac{d v_j}{d t} = -\frac{\partial H}{\partial v_j} = -\sum_{q=1}^K \Gamma_{qj} i_q \quad (j = 1, \dots, J) \quad (2.8)$$

(2.8) 式の一般解は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} i_q(t) &= \sum_{m=1}^M d_{mq} r_m \cos(n_m t + \theta_m) \\ v_k(t) &= \sum_{m=1}^M d'_{mj} r_m \sin(n_m t + \theta_m) \end{aligned} \quad (2.9)$$

ここに、 r_m 、 θ_m は積分定数、 n_m は系の固有周波数（モード周波数）、 M はモードの個数で、系の自由度を表す。また、定数 d_{mq} 、 d'_{mj} は次式を満たす。

$$\sum_{q=1}^K L_q d_{mq} d_{lq} = \sum_{j=1}^J C_j d'_{mj} d'_{lj} = \delta_{ml} I_m \quad (2.10)$$

$$\sum_{q=1}^K \sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} d_{mq} d'_{lj} = -\delta_{ml} n_m I_m \quad (l, m = 1, \dots, M)$$

ただし、 δ_{ml} はクロネッカーの記号である。(2.10)式は各モードの直交性を示し、 I_m を定義する。(2.10)式を用いると、この無損失線形回路に蓄えられるエネルギーは、次のように表せる。

$$\frac{1}{2} \sum_{q=1}^K L_q i_q^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J C_j v_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M I_m r_m^2 \quad (2.11)$$

さて、元の系(2.7)式において、 F 、 G が小さいとき、その解を(2.9)式の振幅、位相が時間とともにゆっくりと変る次の形に仮定する。

$$\begin{aligned} i_q(t) &= \sum_{m=1}^M d_{mq} r_m(t) \cos \varphi_m(t) \quad (q = 1, \dots, K) \\ v_j(t) &= \sum_{m=1}^M d'_{mj} r_m(t) \sin \varphi_m(t) \quad (j = 1, \dots, J) \end{aligned} \quad (2.12)$$

回路の完全化のために、寄生素子を挿入した場合には、(2.9)式のモード中には、寄生素子によって生じる無意味なモードが混入する。(2.12)式では、これらのモードをはぶいてもよい。すなわち、寄生 L 、 C 素子を入れない L 、 C 回路でのモードのみを仮定すればよい。

さて、(2.12)式において、次の3つの場合に分けて、振動の周波数を各々仮定する。

- (i) 完全な共振の場合。すなわち、複数个の固有周波数 n_m の間に、簡単な整数を係数とする1次従属の関係が成立する場合（例えば、2つの周波数が等しい、あるいはその比が3となる等⁽⁶⁾）、これら周波数の間に同期が生じるが、周波数は変化しないから、次式の形に

仮定する。

$$\varphi_m(t) = n_m t + \theta_m(t) \quad (2.13)$$

- (ii) 不完全な共振の場合。すなわち、(i)の条件が近似的に成立する場合、周波数が少しずつ変化して(i)の条件を満たし、同期振動を生じることがある。このとき、周波数 n_m が ω_m に変化すると考え、次の形に仮定する。

$$\varphi_m(t) = \omega_m t + \theta_m(t) \quad (2.14)$$

- (iii) 非共振の場合。固有周波数間に(i)のような共振関係がない場合。各周波数は互いに影響しないから、(2.13)式のように仮定する。

(2.12)式より電流、電圧の変化率は次式となる。

$$\dot{i}_q = \sum_{m=1}^M d_{mq} (\dot{r}_m \cos \varphi_m - r_m \dot{\varphi}_m \sin \varphi_m) \quad (2.15)$$

$$\dot{v}_j = \sum_{m=1}^M d'_{mj} (\dot{r}_m \sin \varphi_m + r_m \dot{\varphi}_m \cos \varphi_m)$$

$$(\dot{} \equiv d/dt)$$

不完全な共振の場合、(2.12) (2.14) (2.15)式を(2.7)式に代入して整理すると、 r_l 、 θ_l に関する次の微分方程式を得る。(付録A参照)

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial r_l} [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] \\ r_l^2 (\dot{\theta}_l + \omega_l - n_l) &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial \theta_l} [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] \\ &\quad (l=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (2.16)$$

$F(r, \theta, t)$ 、 $G(r, \theta, t)$ は、(2.2)式の $F(i)$ 、 $G(v)$ に(2.12)式を代入したものである。

ここで、(2.16)式の右辺を平均化する。

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial r_l} (F+G) \right] dt \\ r_l^2 (\dot{\theta}_l + \omega_l - n_l) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[-\frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial \theta_l} (F+G) \right] dt \end{aligned} \quad (2.17)$$

ただし、時間平均をとる際には、 r 、 θ を定数とみなし、陽な t に関して平均する。⁽⁹⁾

ここで、平均ポテンシャル U を次式で定義する。

$$U(r, \theta) = U(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M)$$

$$= \overline{F + G}$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] dt \quad (2.18)$$

平均ポテンシャルは系の散逸関数である電圧ポテンシャル、電流ポテンシャルの時間平均である。線形抵抗に対しては、これらは物理的な損失（消費電力）と一致する。非線形抵抗に対しては、抵抗素子の損失は、図 2.1 より $i \cdot v = F(i) + G(v)$ で与えられ、電圧ポテンシャル $G(v)$ あるいは電流ポテンシャル $F(i)$ は、厳密な意味での損失（消費電力）を表わすわけではない。しかし、これらは電力の次元をもち、損失に類似の量と考えられるから、以下、これらを「損失分」と呼ぶことにする。この意味において、平均ポテンシャルは系内の損失分の時間平均を表す。

(2.17) 式で偏微分と平均の順序を交換し、(2.18) 式を用いれば、次の平均化方程式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial r_l} \\ r_l^2 (\dot{\theta}_l + \omega_l - n_l) &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial \theta_l} \quad (l = 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (2.19)$$

完全な共振の場合、平均化方程式は (2.19) 式で $\omega_l = n_l$ とおいたものとなる。すなわち、

$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial r_l} \\ r_l^2 \dot{\theta}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial \theta_l} \quad (l = 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (2.20)$$

また、非共振の場合には、平均ポテンシャル U は振幅 r_l のみの関数 $U(r)$ となり、平均化方程式は (2.19) 式で $\omega_l = n_l$ 、 $\partial U / \partial \theta_l = 0$ とおいたものになる。すなわち、

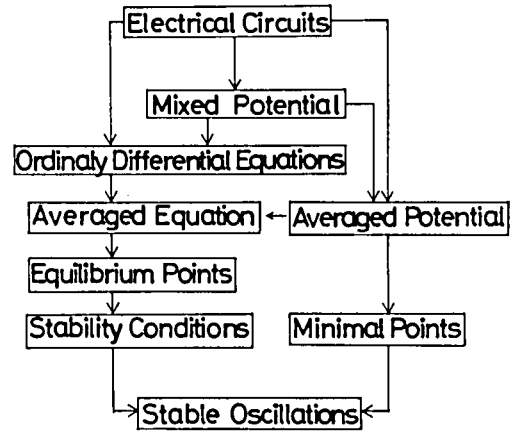
$$\begin{aligned} \dot{r}_l &= -\frac{1}{I_l} \frac{\partial U}{\partial r_l} \\ \dot{\theta}_l &= 0 \end{aligned} \quad (2.21)$$

(2.20) (2.21) 式は、力学系としては勾配系 (gradient system) と呼ばれるもので、次式のように、平均ポテンシャル U が解に沿って単調減少することがわかる。

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \sum_{m=1}^M \frac{\partial U}{\partial r_m} \frac{dr_m}{dt} + \sum_{m=1}^M \frac{\partial U}{\partial \theta_m} \frac{d\theta_m}{dt} \\ &= -\sum_{m=1}^M I_m (\dot{r}_m)^2 - \sum_{m=1}^M I_m (r_m \dot{\theta}_m)^2 \leq 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

U をリャプノフ関数に用いると、次の事実がわかる。『平均ポテンシャル U の孤立極小点は、系の漸近安定な平衡点であり、逆も成立する。』

以上の結果、非共振及び完全な共振の場合、すなわち発振周波数が生成系の周波数から変化しない場合には、系に生じる安定な振動を求める問題は、平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求める問題に帰着する。図 2.2 に従来の平均法を用いる解析法（左側）と、平均ポテンシャルを用いる方法（右側）の流れを示し、比較した。平均ポテンシャルを用いる利点を挙げれば、次のようになる。



Relations of two Analytical Methods

図 2.2 平均化法と平均ポテンシャル法の比較

- (1) 「系の振動は、系全体の損失分の時間平均が小さくなる方向へ変化する」という物理的な意味が明らかになり、系の全体像が理解しやすくなる。以後、この性質を「損失分極小化原理」と呼ぶ。
- (2) 安定平衡点が平均ポテンシャルの極小点で与えられるので、計算が簡単となる。
- (3) 平均化操作が 1 回ですむから、平均化方程式の誘導法としても簡単である。
- (4) 次章以下で述べるような一般的性質が導ける。

不完全な共振が存在する場合の平均化方程式 (2.19) 式は、勾配系とはならないが、同期現象は次のように解釈できる。すなわち、周波数を変化させ同期化することにより U をより小さくしようという抵抗素子の働きと、固有周波数 ω_1 で振動を続けようという L 、 C 素子の働きのバランスで平衡点が決まる。

〔例題〕

図 2.3 のような 1 自由度 van der Pol 発振器に生じる振動を、従来の方法と、平均ポテンシャルを用いる方法の 2 通りの解析法で行い、両者を比較する。

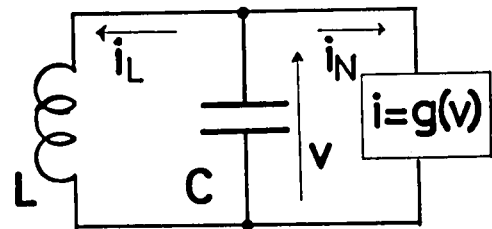


図 2.3 van der Pol 発振器

図中の能動素子の特性を、次の 3 次式で表す。

$$i_N = g(V) = -g_1 V + g_3 V^3 \quad (2.23)$$

回路の状態変数として V , i_L をとり, Brayton-Moser の混合ポテンシャルを作る。

$$P(i_L, V) = G(V) + V \cdot i_L \quad (2.24)$$

能動素子枝は, B_v に分類されるので, 電圧ポテンシャル $G(V)$ をとる。 $G(V)$ は (2.23) 式より次のようになる。

$$G(V) = \int i_N dV = -g_1 V^2 / 2 + g_3 V^4 / 4 \quad (2.25)$$

(2.7) 式より, 回路の微分方程式は次式となる。

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= V \\ C \frac{dV}{dt} &= -i_L + g_1 V - g_3 V^3 \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.26) 式を整理して, 次の van der Pol 方程式を得る。

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} - \mu (1 - x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0 \quad (2.27)$$

ただし,

$$V = \sqrt{g_1 / 3 g_3} x, \quad t = \sqrt{LC} \tau, \quad \mu = g_1 \sqrt{L/C} \quad (2.28)$$

μ が充分小さい時, 周知のように (2.27) 式の安定周期解は次式で近似できる。

$$\begin{aligned} x &= 2 \sin \tau \\ (\text{i. e. } V &= 2 \sqrt{g_1 / 3 g_3} \cdot \sin \tau) \end{aligned} \quad (2.29)$$

次に平均ポテンシャルによる解析を示す。能動素子のコンダクタンスが小さいものとし, これを開放除去した LC 回路を生成系にとる。能動素子は B_v 枝であるから, 寄生 LC 素子を考える必要はない。

生成系に生じる振動は次のようにおける。

$$\begin{aligned} V &= r \sin(\omega t + \theta) \\ i_L &= -\omega C \cdot r \cdot \cos(\omega t + \theta), \quad \omega^2 = 1/LC \end{aligned} \quad (2.30)$$

(2.10) 式で定義される I_m は, この場合 $I_m = C$ となる。平均ポテンシャルは, (2.30) 式を (2.25) 式に代入し, 時間平均したものである。

$$U(r) = \overline{G(V)} = -g_1 r^2 / 4 + 3 g_3 r^4 / 32 \quad (2.31)$$

(2.31) 式の極値を求めると, $r = 0$, 及び $r = 2 \sqrt{g_1 / 3 g_3}$ が得られる。 $r = 0$ は U の極大点を与え, 不安定な状態である。 $r = 2 \sqrt{g_1 / 3 g_3}$ は U の最小値を与え, 安定な振動であって (2.29) 式と一致する。

2.4 む す び

多自由度発振器の解析法として、従来の平均化法にかわるべき平均ポテンシャル法を提案した。平均ポテンシャルは、回路内の損失分の時間平均である。振動の振幅、位相に関する平均化方程式は、平均ポテンシャルの勾配系として導かれ、したがって平均ポテンシャルは、現象の変化にともない減少していく。すなわち、安定な振動は、平均ポテンシャルを極小とするように生じる。この結果、系の解析は平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求める問題に帰着する。

3. 3 次特性の能動素子を用いた発振器

3.1 ま え が き

本章では、能動素子が3次特性の発振器において、各モード周波数に簡単な関係のない非共振の場合を考える。この場合、平均ポテンシャルが2次形式となる事を利用して、非同期多重モード振動の発生に関する一般的な法則を導く。次に、系に生じるすべての多重モード振動を効率よく求めるアルゴリズムを構成する。また、単一モード振動や多重モード振動が安定になる十分条件を求め、それを1個の能動素子の性質とモードの形状から説明する。

次に、これらの結果を用いて、はしご状発振器に生じる振動モードの発生機構を、平均ポテンシャルの立場から説明する。また、能動素子が部分的に装荷されたはしご状発振器において、従来知られていなかった3重、4重モード振動が生じる事実を示す。

3.2 2次形式の極値問題

B_i に属する N_i 個の電流制御抵抗、 B_v に属する N_v 個の電圧制御抵抗の特性が、それぞれ、次のような3次式で表されるとする。

$$\begin{aligned} v_k &= f_k(i_k) = \alpha_k i_k + \beta_k i_k^3 & (k = 1, \dots, N_i) \\ i_k &= g_k(v_k) = \alpha_k v_k + \beta_k v_k^3 & (k = N_i + 1, \dots, N) \\ N &= N_i + N_v \end{aligned} \quad (3.1)$$

各素子の電流ポテンシャル、あるいは電圧ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} F(i_k) &= \int v_k di_k = \frac{1}{2} \alpha_k i_k^2 + \frac{1}{4} \beta_k i_k^4 & (k = 1, \dots, N_i) \\ G(v_k) &= \int i_k dv_k = \frac{1}{2} \alpha_k v_k^2 + \frac{1}{4} \beta_k v_k^4 & (k = N_i + 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (3.2)$$

各素子に加わる電流 i_k および電圧 v_k は、(2.12)式の状態変数 i_q, v_j のいくつかの和であるから、次のように書ける。

$$\begin{aligned} i_k &= \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m(t) \cos [n_m t + \theta_m(t)] & (k = 1, \dots, N_i) \\ v_k &= \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m(t) \sin [n_m t + \theta_m(t)] & (k = N_i + 1, \dots, N) \end{aligned}$$

ただし、 P_{mk} は、 d_{mq}, d'_{mj} と回路構造から決まる定数である。ここで、モード周波数が非共振であるとする。すなわち、次のいずれの関係も成立しない場合を考える。⁽⁶⁾

$$\begin{aligned}
& \text{(i)} \quad n_i \doteq n_j \\
& \text{(ii)} \quad n_i \doteq 3n_j \\
& \text{(iii)} \quad n_i \doteq |n_j \pm n_k| / 2 \\
& \text{(iv)} \quad n_i \doteq |n_j \pm n_k \pm n_l|
\end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし、 i, j, k, l は、 $1, \dots, M$ の中から、任意に異なる4数を選ぶ。

B_i の素子1個の平均電流ポテンシャル U_k は、非共振の仮定から次のようになる。

$$\begin{aligned}
U_k &= \overline{F(i_k)} = \frac{1}{2} \alpha_k \overline{i_k^2} + \frac{1}{4} \beta_k \overline{i_k^4} \\
&= \frac{\alpha_k}{4} \sum_{m=1}^M P_{mk}^2 R_m + \frac{3}{32} \beta_k \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M (2 - \delta_{ml}) P_{mk}^2 P_{lk}^2 R_m R_l \\
&\quad (k = 1, \dots, N_i)
\end{aligned} \tag{3.4}$$

ただし、 $R_m = r_m^2$ 、 δ_{ml} はクロネッカーの記号である。(3.4)式は、振幅の2乗値 R_m に関する2次形式であり、 B_v の素子の平均電圧ポテンシャルも、これと同じ形となるから、回路全体の平均ポテンシャル U は次のようになる。

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{k=1}^N U_k = \sum_{m=1}^M b_m R_m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M a_{ml} R_m R_l \\
&\text{ただし、} \\
b_m &= \sum_{k=1}^N \frac{\alpha_k}{4} P_{mk}^2 \quad (m = 1, \dots, M) \\
a_{ml} &= \sum_{k=1}^N \frac{3}{16} \beta_k (2 - \delta_{ml}) P_{mk}^2 P_{lk}^2 \quad (m, l = 1, \dots, M)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

あるいは、ベクトルを用いて次のように書く。

$$\begin{aligned}
U &= \mathbf{b}^T \mathbf{R} + \frac{1}{2} \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \\
\mathbf{b} &= \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_M \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

\mathbf{A} : 対称行列

そこで、安定な非同期多重モード振動を求めるためには、次の問題を考えればよい。

〔2次形式の極値問題〕

$R_1 \geq 0, \dots, R_M \geq 0$ の制約の下で、2次形式(3.6)式を極小とする \mathbf{R} を求めよ。

この問題に関し、次の結果が成立する。必要ならば、変数を入れかえて、 m 重モード振動に対応する R^*

$$R_1^* > 0, \dots, R_m^* > 0, R_{m+1}^* = \dots = R_M^* = 0$$

が問題の極小解であるとする。このとき、次の3条件が成立する。

$$(i) \text{ 平衡条件 } \frac{\partial U}{\partial R_j} \Big|_{R=R^*} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.7)$$

$$(ii) \text{ 抑制条件 } \frac{\partial U}{\partial R_d} \Big|_{R=R^*} \geq 0 \quad (d = m+1, \dots, M) \quad (3.8)$$

(iii) 正定条件 A から R_1, \dots, R_m に対応する行と列を取り出した $m \times m$ 小行列 A^* は非負定値である。

逆に、次の3条件が成立すれば、 R^* は極小解である。

$$(i)' \frac{\partial U}{\partial R_j} \Big|_{R=R^*} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (3.9)$$

$$(ii)' \frac{\partial U}{\partial R_d} \Big|_{R=R^*} > 0 \quad (d = m+1, \dots, M) \quad (3.10)$$

(iii)' A^* は正定値である。

条件(ii)において等号が成立する場合や、 A^* がゼロ固有値をもつ場合には、(i) ~ (iii) を満たす R^* が極小を与えるかどうか簡単にはわからない。以下では、(i)' ~ (iii)' を満たすような極小解のみを考える。

3.3 3次特性の能動素子を用いた発振器の基本的性質

「2次形式の極値問題」の解の性質を用いて非同期多重モード振動に関する性質を示す。

ある m 重モード振動を構成する m 個の周波数成分の中の l 個 ($l < m$) の成分からなる l 重モード振動を、もとの m 重モード振動の部分モード振動と呼ぶことにする。

〔I〕部分モード振動の禁止則

ある多重モード振動と、その部分モード振動が、共に安定となることはない。

(証明) m 重モード振動 $R_1 > 0, \dots, R_m > 0$ が安定に発生したとする。 R_1, \dots, R_m に対する小行列は、仮定により正定値である。したがって、 m 変数2次形式

$$U^* = \sum_{j=1}^m b_j R_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m a_{ij} R_i R_j \quad (3.11)$$

は狭義凸関数である。よって、凸領域 $R_1 \geq 0, \dots, R_m \geq 0$ で U^* を最小化する問題は凸計画問題である。凸計画問題では局所最小解は一意に決まるから、部分モード振動は(3.11)式の極小点ではあり得ない。
(証了)

例えば、 M 自由度系において、 M 個の単一モード振動が安定ならば、その他の多重モード振動はすべて不安定である。また、すべての周波数成分を含む M 重モード振動が安定ならば、これは唯一の安定な振動である。

この結果、非線形共振回路をもつ発振器について得られていた結果⁽¹³⁾が、広く一般の回路に成り立つ法則であることが明らかになった。また、無発振状態が安定ならば、すべての振動状態は不安定となるから、非共振の現象を考える限り硬い発振特性にはならない。

(II) 多重モード振動の上限則

(3.6) 式の対称行列 A の正固有値の個数を N_1 、回路中の正の飽和要素の個数、すなわち (3.1) 式において $\beta_k > 0$ を満たす素子の個数を N_2 とする。安定に生じる m 重モード振動に対して、

$$N_2 \geq N_1 \geq m \quad (3.12)$$

が成立する。証明は付録 B に示す。

この法則は、van der Pol の例において、2重モード振動が生じないこと⁽¹⁾、非線形共振回路をもつ発振器に多重モード振動が生じること⁽¹³⁾等の事例を一般化したものとなっている。

次に、モード l 及び l' の周波数成分を含む m 重モード振動 ($m \geq 2$) が安定に発生するための条件を求める。モード l 及び l' が、 m 重モード振動中に共存できるためには、(3.6) 式の A で、 l 、 l' に対する行列が正定値でなければならない。これより次の法則が得られる。

(III) 2つのモードの共存条件

モード l と l' が安定な m 重モード振動 ($m \geq 2$) の周波数成分として含まれるためには、(3.5) 式の a_{ll} について次式が成立しなければならない。

$$a_{ll} - a_{l'l'}^2 > 0 \quad (3.13)$$

(3.13) 式は、更に次のように解釈できる。(3.5) 第3式を用いて、(3.13) 式を書き直す。

$$\left(\sum_{k=1}^N \beta_k P_{lk}^4 \right) \left(\sum_{k=1}^N \beta_k P_{l'k}^4 \right) > 4 \left(\sum_{k=1}^N \beta_k P_{lk}^2 P_{l'k}^2 \right)^2 \quad (3.14)$$

飽和の符号がすべて正 ($\beta_k > 0$, $k = 1, \dots, N$) とすると、(3.14) 式は次式となる。

$$\frac{(D_l, D_{l'})}{\|D_l\| \cdot \|D_{l'}\|} < \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

ただし、 D_l は、振動モード l による各素子の飽和の程度を表すベクトルで、

$$D_l = (\sqrt{\beta_1} P_{l1}^2, \sqrt{\beta_2} P_{l2}^2, \dots, \sqrt{\beta_N} P_{lN}^2) \quad (3.16)$$

で定義される。 $\| \cdot \|$ はユークリッドノルム、 $(,)$ は内積を示す。

(3.15) 式は、2つのベクトル D_l, D_r のなす角が 60° 以上であること、すなわち、2つのモードの飽和の程度があまり競合しない場合に限り、これらのモードの周波数成分を共に含む多重モード振動が生じる可能性がある。

すべてのモードの組み合わせにより生じる多重モード振動は一般に 2^M 個あるが、性質 I, II, III により安定となりえないものを取り除ける。安定となる振動は、以下述べるアルゴリズムによって、そのすべてを見出すことができる。次に述べる性質 IV は、アルゴリズムの基礎付けとなるものである。

(IV) モード励起列の存在則

2次形式の極小化問題の解 R^* に対して、変数の順を適当に入れかえて、次の条件を満たすベクトル列 $R_1^*, \dots, R_m^*(=R^*)$ を作ることができる。

$$R_k = \begin{pmatrix} A_k^{-1} b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} A_k^{-1} b_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} \right\} M - k \text{ 個} \quad (k = 1, \dots, m) \quad (3.17)$$

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}$$

A_k は $k \times k$ 正定値行列、 $b_k = (b_1, \dots, b_k)^T$

$$A_k^{-1} b_k > 0 \quad (3.18)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R_{k+1}} \right|_{R=R_k^*} < 0 \quad (k = 1, \dots, m-1) \quad (3.19)$$

すなわち、単一モード R_1^* から始めて、 k 重モード R_k^* では抑制できないモード ($k+1$) を次々に付け加えていくことにより、最後に安定な m 重モード振動 R_m^* を得ることができる。

(証明) $k = m, m-1, \dots, 1$ の順に帰納法で示す。

$$\begin{aligned} \min U(R_1, \dots, R_M) \\ \text{subject to } R_{k+1} = \dots = R_M = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

の最小解は $(R_1, \dots, R_k, 0, \dots, 0) = R_k^* \geq 0$ である。

次に、 $M - k + 1$ 個の変数を 0 とする最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} \min U(R_1, \dots, R_M) \\ \text{subject to } R_{k+1} = \dots = R_M = 0 \\ R_1 \cdot R_2 \cdot \dots \cdot R_k = 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

この最小解を \tilde{R} とおき、変数の入れ換えにより、 k 番目以降の成分が 0 となるようにする。

すなわち,

$$\widetilde{\mathbf{R}} = (\widetilde{\mathbf{R}}_{k-1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{M-k+1 \text{ 個}}) \quad (3.22)$$

とおくと, $\widetilde{\mathbf{R}}_{k-1} > 0$ である。なぜならば, もし, $\widetilde{\mathbf{R}}_{k-1}$ の負に成分があれば, 適当な λ ($0 < \lambda < 1$) をとると,

$$\mathbf{R}_\lambda = (1 - \lambda) \mathbf{R}_k^* + \lambda \widetilde{\mathbf{R}} \quad (3.23)$$

は, 制約式 (3.21) を満たす。 A_k の正定値性から

$$U[\widetilde{\mathbf{R}}] > U[\mathbf{R}_\lambda] > U[\mathbf{R}_k^*] \quad (3.24)$$

であるが, これは $\widetilde{\mathbf{R}}$ が制約式 (3.21) 式の下での最小解であることに反す。よって, $\widetilde{\mathbf{R}}_{k-1} > 0$ 。

この $\widetilde{\mathbf{R}}_{k-1}$ は, (3.17) (3.18) 式を満たす。また,

$$\partial U / \partial R_k \big|_{\mathbf{R}=\widetilde{\mathbf{R}}} < 0$$

である。もし, $\partial U / \partial R_k > 0$ ならば, R_1, \dots, R_{k-1} の $(k-1)$ 重モードは安定になり, 部分モードの禁止則に反するからである。 (証了)

上述の性質 I ~ V を用いて, 数値的に (3.6) 式的全極小点を求めるアルゴリズムが構成できる。

[非定符号 2 次形式 (3.6) 式の極小点をすべて求めるアルゴリズム]

- (1) Γ_1 を, すべての単一モード振動 (M 個) の集合とする。 $k = 1$ として次へ。
- (2) 集合 Γ_{k+1} を空とする。 Γ_k は, k 重モード振動の候補者の集合である。
- (3) 集合 Γ_k から, k 重モード振動のパターンを 1 つとり出す。
- (4) 行列 $A = (a_{mi})$ から, 対応する行, 列をとり出し, $k \times k$ 小行列 A_k を作る。同様に \mathbf{b}_k を作る。
- (5) A_k が正定値でなければ, (8) へ進む。正定値であれば, 次へ進む。
- (6) $\mathbf{R}_k^* = A_k^{-1} \mathbf{b}_k > 0$ でなければ (8) へ進む。 $\mathbf{R}_k^* > 0$ ならば (7) へ進む。なお, (5), (6) の一連の操作は, 対称行列 A_k の LL^T 分解 (Cholesky 法) ⁽¹⁴⁾ により一度に行なえる。
- (7) この k 重モードに含まれていない $M - k$ 個の変数 R_d について, 抑制条件 (3.10) 式を調べる。すなわち,
 - (7.1) すべて $\partial U / \partial R_d > 0$ ならば, 安定な k 重モード振動が得られたので記録する。
 - (7.2) $\partial U / \partial R_d < 0$ である R_d が存在すれば, \mathbf{R}_k^* に d を組み合わせた $(k+1)$ 重モード振動を Γ_{k+1} に加える。この時, モード間の組み合わせ条件を調べる。すなわち, \mathbf{R}_k^* の成分であるモード i と, 組み合わせすべきモード d について,

(7.2.1) d が単一モード振動として安定でない。

(7.2.2) i と d が共存条件 (3.13) 式を満たす。

(7.2.3) $k \geq 2$ の時には, (i, d) が 2 重モード振動として安定ではない。

の 3 条件を満たす時に限り, R_k^* と d の組み合わせを Γ_{k+1} に加える。

(8) Γ_k の全要素について, (3) 以下をくり返す。

(9) Γ_{k+1} が空集合でなければ, $k \leftarrow k+1$ として (2) へ進む。 Γ_{k+1} が空ならば終り。

3.4 1 個の能動素子を用いた発振器

3 次特性の能動素子 1 個の性質を調べるため, 図 3.1 のような発振器を考える。能動素子の特性を次式とする。

$$\begin{aligned} i &= g(V) = -g_1 V + g_3 V^3 \\ &= g_1 \sqrt{\frac{g_1}{3g_3}} \left(-v + \frac{1}{3} v^3 \right) \quad (3.25) \end{aligned}$$

ただし, $V = \sqrt{g_1/3g_3} \cdot v$ 。 g_1, g_3 は微小とする。

この素子の散逸関数である電圧ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} G(V) &= \int i \, dV = -\frac{g_1}{2} V^2 + \frac{g_3}{4} V^4 \\ &= \frac{g_1^2}{3g_3} \left(-\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{12} v^4 \right) \quad (3.26) \end{aligned}$$

各共振回路の周波数が互いに共振を生じない場合,

(3.5) 式より各共振回路の損失 $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ は能動素子の特性 $g(V)$ の 1 次の損失項 g_1 と, 平均ポテンシャルに対して同じ働きをする。ここで, 各共振回路の損失が等しい ($\alpha_1 = \dots = \alpha_M$) と仮定すると, 各共振回路の損失 α_m は, $g(V)$ の 1 次損失項 g_1 に含めて考えることができる。そこで, 以下, この操作を行なったとして, $\alpha_1 = \dots = \alpha_M = 0$ とおく。

能動素子にかかる電圧は, 各共振回路の電圧の和として, 次のように表せる。

$$v = \sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (3.27)$$

平均ポテンシャル U^* は, (3.27) 式を (3.26) 式に代入し, 時間平均して得られる。

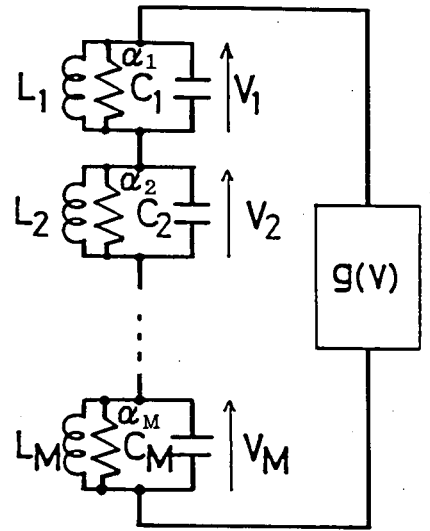


図 3.1 1 個の能動素子をもつ多自由度発振器

$$U^*(r_1, \dots, r_M) = \frac{g_1^2}{3g_3} U$$

$$U = -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^M R_m + \frac{1}{32} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M (2 - \delta_{ml}) R_m R_l \quad (3.28)$$

以下、簡単のため U^* を正定数倍して無次元化した U の極小化を考える。

$M=2$ の場合の平均ポテンシャル U (3.28) 式の値を等高線図として、図 3.2 に示す。

平均ポテンシャルの地形は次のように理解できる。

- (1) 2 個の単一モード振動 (r_1, r_2) = (2, 0), (0, 2) は平均ポテンシャルが最小値をとる「池」である。
- (2) 2 個の単一モード振動と 2 重モード振動 ($2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}$) を結ぶ「谷」がある。2 重モード振動はこの谷中の峠である。
- (3) 発振停止状態に対する (r_1, r_2) = (0, 0) は「山」となっている。
- (4) 強く飽和の生じる $r_1 + r_2 \gg 2$ の部分は高い「崖」になっている。

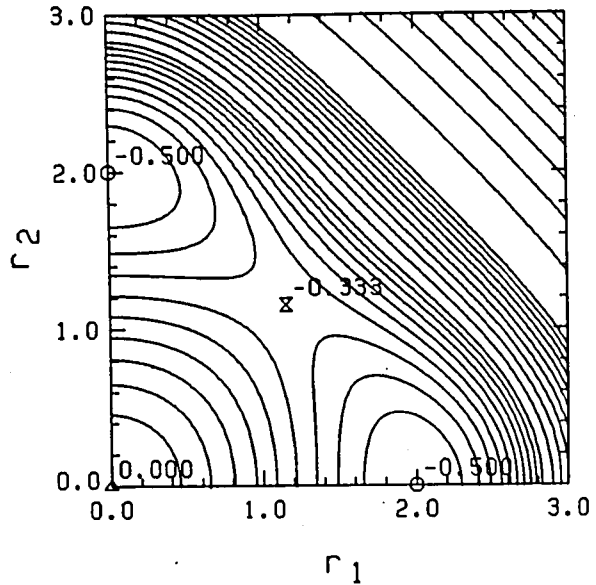


図 3.2 平均ポテンシャルの等高線図

一般に、 $M > 2$ の場合でも、1 つの能動素子を用いた発振器では、単一モード振動に対する平均ポテンシャルが最小となり、これが安定な状態となる。なお、3.3 節Ⅱの「多重モード振動の上限則」より、2 重モード以上の多重モード振動は安定とならない。

3.5 複数個の能動素子を用いた発振器

具体的な回路の解析に進む前に、本節では複数個の、同じ特性の能動素子を含む系において、振動モードが安定となるための条件を求め、1 個の能動素子の性質との関連を検討する。

3.5.1 系の記述

線形のコイル、コンデンサーおよびその特性が (3.25) 式で与えられるような N 個の能動素

子から成る発振器を考える。このような発振器は、従来から考察されてきた多数の van der Pol 発振器を L 、あるいは C で 1 次元的に結合したはしご状発振器⁽³⁾ および、それらの能動素子が部分的にしか装荷されていない系⁽⁴⁾ 等を一般化したものである。

この系において、 k 番目の能動素子にかかる電圧 v_k は次のように仮定できる。

$$v_k(t) = \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (k = 1, \dots, N) \quad (3.29)$$

ただし、 M は系の自由度、 ω_m 、 P_{mk} は能動素子を開放した線形の固有周波数(モード周波数) および、固有ベクトルであって、 L および C の接続状態より定まる。 ω_m の間には簡単な関係がない(非共振)とする。また、能動素子は、すべて同じ特性をもつとする。この発振器全体の平均ポテンシャルは、(3.26)、(3.29)式を用いて、(3.5)式より計算できる。すなわち、 k 番目の能動素子の電圧ポテンシャルおよび平均ポテンシャルを G_k 、 U_k とすると、系全体のポテンシャルは、それらの総和で与えられる。

$$\begin{aligned} U(r) &= \sum_{k=1}^N U_k(r) = \sum_{k=1}^N \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G_k dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M a_{ml} R_m R_l - \sum_{m=1}^M b_m R_m \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\text{ここに, } a_{ml} = \frac{1}{16} \sum_{k=1}^N (2 - \delta_{ml}) P_{mk}^2 P_{lk}^2$$

$$b_m = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N P_{mk}^2 \quad (3.31)$$

ただし、(3.28)式と同様に、正定数倍を無視した。

以下、(3.30)、(3.31)式に基づき、発振器に生じる単一モード振動、多重モード振動の発生条件について検討する。

3.5.2 2 個の能動素子をもつ系

能動素子、すなわち飽和素子が 2 個の場合には、「多重モード振動の上限則」により、3 重モード以上の多重モード振動はすべて不安定である。そこで、単一モード、2 重モード振動について考える。以下、注目するモードを $m = 1, 2$ 、能動素子の位置を $k = 1, 2$ で表す。

〔単一モード振動の安定条件〕

モード 1 の単一モードの振幅は、(3.7)、(3.31)式により

$$R_1 = b_1 / a_{11} \quad (3.32)$$

と求まる。これが安定である必要十分条件は、(3.10)式より、

$$a_{d1} \cdot b_1 > a_{11} b_d \quad (\forall d, d \neq 1) \quad (3.33)$$

となる。(3.31) 式を (3.33) 式に代入して次式を得る。

$$\sum_{k=1}^2 P_{dk} \left\{ 2 P_{1k} \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 - \sum_{j=1}^2 P_{1j}^4 \right\} > 0 \quad (\forall d, d \neq 1) \quad (3.34)$$

(3.34) 式がすべての d について成立する条件は簡単ではないが、十分条件として次式を考える。

$$2 P_{1k} \sum_{j=1}^2 P_{1j}^2 - \sum_{j=1}^2 P_{1j}^4 > 0 \quad (k = 1, 2) \quad (3.35)$$

(3.31), (3.32) 式を用いて, (3.35) 式を変形する。

$$1 < \frac{2 P_{1k} \sum P_{1j}^2}{\sum P_{1j}^4} = \frac{2 P_{1k} \cdot 4 b_1}{16 a_{11}} = \frac{1}{2} P_{1k} \cdot R_1 \quad (3.36)$$

これは, 素子 k にかかるモード電圧 (3.29) 式の振幅が, $P_{1k} \sqrt{R_1} = P_{1k} r_1 \geq \sqrt{2}$ なること, すなわち, 2つの能動素子が共に飽和してしまうことを意味する。

ここで, $P_1 = |P_{11}/P_{12}|$ とおき, (3.35) 式を解けば,

$$\sqrt{2} - 1 < P_1^2 < \sqrt{2} + 1 \quad (3.37)$$

を得る。 P_1 は, モード1の振動により, 素子1, 素子2にかかる電圧の比を表すから, 2つの能動素子に均等に近い形でのモードが, 単一モード振動として安定になることがわかる (図3.3(a))。

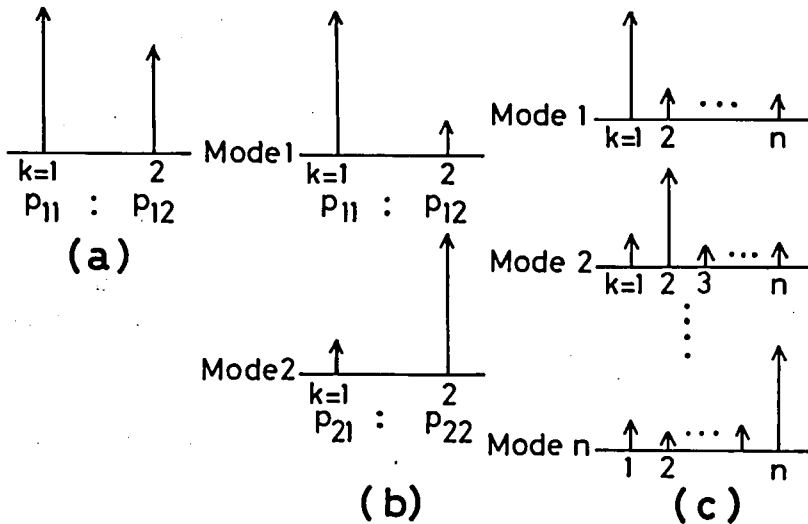


図3.3 安定な振動となるモードの形状

a) 単一モード振動, b) 2重モード振動, c) n重モード振動

〔2重モード振動の安定条件〕

モード1, 2の2重モード振動の振幅は, (3.7), (3.30)式より次式となる。

$$\begin{aligned} R_1 &= (a_{22} b_1 - a_{12} b_2) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \\ R_2 &= (a_{11} b_2 - a_{21} b_1) / (a_{11} a_{22} - a_{12}^2) \end{aligned} \quad (3.38)$$

(3.13)式より, R_1, R_2 が正である条件は次式となる。

$$\begin{aligned} a_{21} b_1 &< a_{11} b_2 \\ a_{12} b_2 &< a_{22} b_1 \end{aligned} \quad (3.39)$$

(3.39)式に(3.31)式を代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} P_2^2 (1 + 2P_1^2 - P_1^4) &< 1 - 2P_1^2 - P_1^4 \\ P_1^2 (1 + 2P_2^2 - P_2^4) &< 1 - 2P_2^2 - P_2^4 \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\text{ここに, } P_1 = P_{12} / P_{11}, \quad P_2 = P_{21} / P_{22} \quad (3.41)。$$

さらに, この2重モードが他のモード d を抑制する次の条件を満たせば, 2重モード振動は安定となる。

$$\partial U / \partial R_d = a_{1d} R_1 + a_{2d} R_2 - b_d > 0 \quad (\forall d, d \neq 1, 2) \quad (3.42)$$

(3.42)式に(3.38)式を代入し, (3.33)式から(3.35)式を導いたのと同様に考えて, (3.42)式の十分条件として次式を得る。

$$\sum_{m=1}^2 P_m^2 R_m - 2 > 0 \quad (k = 1, 2) \quad (3.43)$$

これは, 2つの能動素子が共に飽和する条件である。さて, (3.38)式を(3.42)式に代入し, (3.31)式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} 1 - 2P_1^2 - 2P_2^2 + P_1^4 P_2^4 - 2P_1^2 P_2^2 (P_1^2 + P_2^2) - P_2^4 + 3P_1^4 &> 0 \\ 1 - 2P_2^2 - 2P_1^2 + P_1^4 P_2^4 - 2P_1^2 P_2^2 (P_1^2 + P_2^2) - P_1^4 + 3P_2^4 &> 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

(3.37), (3.40), (3.44)式の条件を図3.4に示す。斜線を施した領域で, (3.37)あるいは(3.44)式の十分条件が成立し, 単一モードあるいは2重モード振動が安定となる。 $P_1^2 = P_2^2 = 1$ に近いところでは, 2つの単一モード振動が生じ, $P_1 = P_2 = 0$ に近いところでは, 2重モード振動が生じる。すなわち, モード1が素子1に大電圧, 素子2に小電圧を与え, モード2がその逆となっている時, 2つのモードは互いに補い合う形となり(図3.3(b)), 2重モード振動として安定になる。

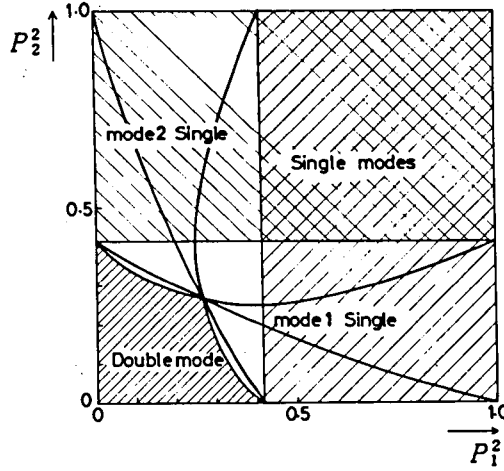


図 3.4 単一モードおよび 2 重モード振動の発生領域

3. 5. 3 N 個の能動素子をもつ系

能動素子が N 個 ($k=1, \dots, N$) 用いられた発振器では, 多重モード振動の上限則より N 重モード振動までが生じうる。2 個の場合の結果から, N 個の能動素子すべてに均等に近い形でのモードは単一モード振動として安定であると予想される。また, 素子 i にのみ大電圧をかけ, 他の素子 j には小電圧しかかけないような N 個のモード (3.3(c)) の組み合わせは, N 重モード振動となることが予想される。以下, 単一モード, および N 重モード振動の生じる十分条件を導く。

(単一モード振動の生じる十分条件)

モード l が単一モード振動であるための十分条件は, (3.35) 式と同様に次式で与えられる。

$$2 P_{lk}^2 \sum_{j=1}^N P_{lj}^2 - \sum_{j=1}^N P_{lj}^4 > 0 \quad (k=1, \dots, N) \quad (3.45)$$

さらに, (3.45) 式の十分条件として次式を得る。

$$\sqrt{2} \min_k P_{lk}^2 > \max_k P_{lk}^2 \quad (3.46)$$

特に,

$$P_{l1}^2 = P_{l2}^2 = \dots = P_{lN}^2 \quad (3.47)$$

が成立するようなモード l に対しては, 能動素子の位置, 個数にかかわらず (3.46) 式が成立するから, 常に単一モード振動として安定である。

〔 N 重モード振動の生じる十分条件〕

$i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N (i \neq j)$ に対して,

$$P_{ij}^2 < \frac{0.107}{N-1} P_{jj}^2 \quad (3.48)$$

が成立すれば、 N 重モード振動は安定である。 $P_{ij} \ll P_{jj}$ のとき、(3.31) 式より行列 $A = (a_{mi})$ はほとんど対角行列となり、安定条件(i)~(iii) (3.2節) が満たされるからである (詳しい証明は省略)。

結局、1個あるいは複数個の振動モードの組み合わせに対して、すべての能動素子が単一モード振動に近い状態をとれば、各能動素子の平均ポテンシャルは、3.3節で述べた「池」に近い状態をとり、その結果、系全体の平均ポテンシャルが極小となって安定な振動状態となる。

これは、次の原理により説明される。

〔満場一致原理〕

状態 R^* が、すべての k ($k = 1, \dots, N$) について、 k 番目の能動素子の平均ポテンシャル $U_k(R)$ を極小としているならば、系全体の平均ポテンシャル

$$U(R) = \sum_{k=1}^N U_k(R) \quad (3.49)$$

は R^* で極小となる。

すなわち、いくつかのモードの重ね合わせにより、各々の素子にとって「望ましい」状態 (平均ポテンシャルが極小となる状態) が実現されていれば、それは系全体にとっても、その状態は「望ましい」のである。

3.5.2節で、 $P_1 = P_2 = 1$ や $P_1 = P_2 = 0$ の場合、(3.47) 式が成立する場合、(3.48) 式で $P_{ij} = 0$ となっている場合は、満場一致原理が完全に満たされている場合である。

本節で述べた結果は、満場一致原理が近似的に成立すれば、安定な振動現象が生じることを示している。

3.6 能動素子を全段に含むはしご状発振器

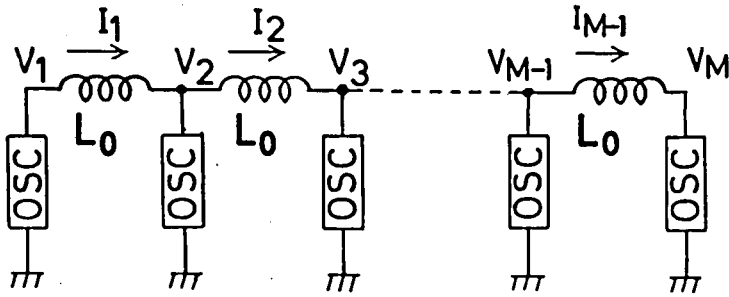
本節では、図 3.5 のように、はしご状に結合された発振器群の解析を、平均ポテンシャルを用いて行う。この系は、既に平均法により解析されており、単一モード、2重モード振動が安定に生じ、3重以上の多重モード振動は安定に生じないことが報告されている。平均ポテンシャルにより、これらの結果を簡単に導き、物理的説明を行う。

3.6.1 系の記述と平均ポテンシャル

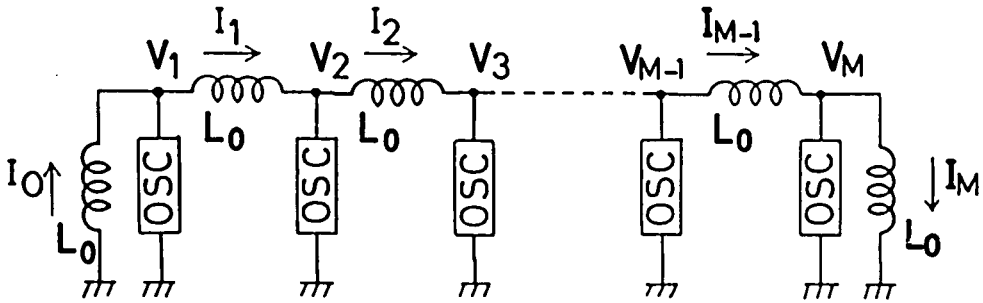
図 3.5 の回路方程式は次式となる。

$$I_k = \frac{1}{L_0} \int (V_k - V_{k+1}) dt$$

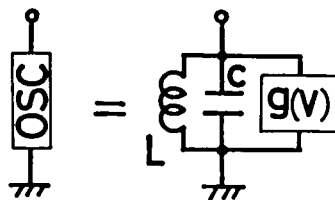
$$I_{k-1} - I_k = C \frac{dV_k}{dt} + \frac{1}{L} \int V_k dt + g(V) \quad (3.50)$$



(a) Open



(b) Short



(c) Unit Oscillator

図 3.5 はしご状発振器

能動素子特性 $g(V)$ は、(3.25)式で与え、 V を(3.25)式と同様に規格化する。

$g(V) \equiv 0$ において、生成系の解を求める。

図 3.5(a)の系（以下、開放系と呼ぶ）では、終端条件は、 $V_0 = V_1$, $V_M = V_{M+1}$ とおける。このとき、生成系の解は規格化された v_k に対し、(3.29)式の形で与えられる。 P_{mk} , ω_m は次のようになる⁽³⁾。

$$P_{mk} = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{(2k-1)(m-1)}{2M} \pi & (m=2, \dots, M) \\ 1 & (m=1) \end{cases}$$

$$\omega^2 = (1 + \alpha - 2\alpha \cos \frac{m-1}{M} \pi) \omega^2 \quad (3.51)$$

ただし、

$$\omega^2 = 1 / LC + 1 / L_0 C, \quad \alpha = \frac{L}{L + L_0} \quad (3.52)$$

m はモード番号を表す。

図 3.5(b)の系（接地系）に対して終端条件は $V_0 = V_{M+1} = 0$ であり、 P_{mk} , ω_m は次式となる。

$$P_{mk} = \sqrt{2} \sin \frac{mk}{M+1} \pi$$

$$\omega_m^2 = (1 + \alpha - 2\alpha \cos \frac{m}{M+1} \pi) \omega^2 \quad (3.53)$$

平均ポテンシャルは(3.30)式で与えられ、(3.31)式の a_{ml} , b_m は次のようになる。

開放系の場合

$$b_m = M / 4$$

$$(a_{ml}) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & \dots & 4 \\ 4 & 3 & & 4 & 2 \\ & & 3 & & \\ \vdots & & & 2 & 4 \\ & 4 & & & \\ \vdots & & & & 3 & \\ 4 & 2 & & 4 & & 3 \end{pmatrix} \times \frac{M}{32} \quad (3.54)$$

ただし、(3.54)式は M が偶数の場合で、奇数の場合には第 $(1 + M/2)$ 行、 $(1 + M/2)$ 列を取り外して考える。

接地系の場合

$$b_m = (M + 1) / 4$$

$$(a_{ml}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & & 4 & & 6 \\ & & 3 & & 6 & \\ 4 & & & 4 & & 4 \\ & & 6 & & 3 & \\ 6 & & & 4 & & 3 \end{pmatrix} \times \frac{M+1}{32} \quad (3.55)$$

ただし、(3.55) 式は M が奇数の場合で、偶数の場合には、第 $(M+1)/2$ 行、 $(M+1)/2$ 列を取り外して考える。

3.6.2 モードの安定性

開放系について、モードの共存条件 (3.13) 式は、 l と $M+2-l$ ($l=2, \dots, M, l \neq 1+M/2$) の間に成立する。

これを考慮して、3.2 節のアルゴリズムを適用すると、安定な振動は次のように求まる。

$m=1$, $1+M/2$ の単一モード振動

l と $M+2-l$ の 2 重モード振動 ($l \neq 1, 1+M/2$)

ただし、 M が奇数の時には、 $1+M/2$ は除いて考える。

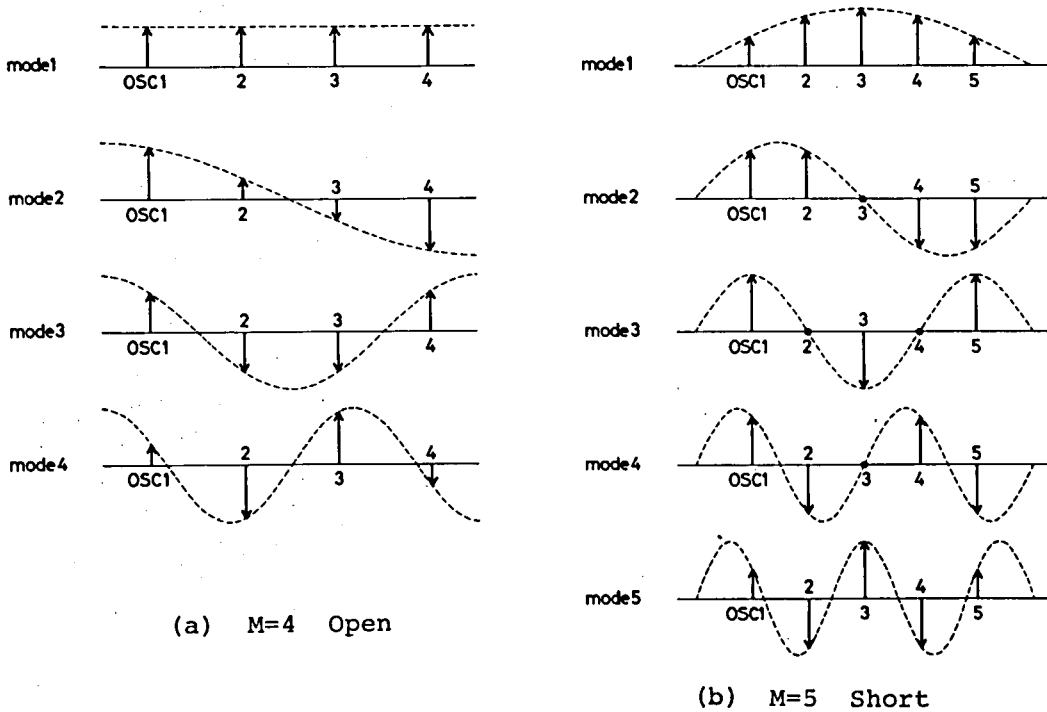


図 3.6 はしご状発振器のモードの形状

$M = 4$ の場合のモードの形状を図 3.6(a) に示す。振動の物理的意味を説明しよう。 $m = 1$ 及び $m = (1 + M/2) = 3$ のモードは、条件 (3.47) を満たし、各能動素子に等しい電圧がかかる。したがって、各発振器がすべて結合前と同じ振幅で振動すれば、各能動素子の平均ポテンシャルが最小となり、その結果系全体の平均ポテンシャルも最小となるから、これらのモードは安定な単一モード振動となる。これは、前節で述べた満場一致原理が完全に成立する例である。

一方、モード 2 と 4 (一般的には、 l と $M + 2 - l$) を考えると、(3.51) 式より次の相補的な関係が成立する。

$$P_{lk}^2 + P_{M+2-l,k}^2 = 2 \quad (k = 1, \dots, M) \quad (3.56)$$

すなわち、各能動素子に対し、一方のモードの振幅が大きければ、他方は小さい。このように、すべての能動素子に互に振幅の大小を補い合う形状の 2 つのモードが加わると、個々の素子の平均ポテンシャルは極小ではないが、極小値に近い「谷」の値をとり、それらの総和である系全体の平均ポテンシャルは極小となる。そこで、この 2 重モード振動は安定となる。

接地系の場合には、どのモードの間にも、共存条件 (3.13) 式は成立しないから、モード l の単一モード振動 ($l = 1, \dots, M$, $l \neq (1 + M)/2$) だけが安定である。 $(1 + M)/2$ の単一モードについては $\partial U / \partial R_d = 0$ ($d \neq (1 + M)/2$) が成立し、安定性の判定が別に必要である。この単一モードの不安定性は次のようにして示せる。単一モード $(M + 1)/2$ の振幅は、

$$R_{(M+1)/2} = 2, \quad R_d = 0 \quad (d = 1, \dots, M; 2d \neq M + 1) \quad (3.57)$$

である。これに摂動を加えて、

$$R_1 = \delta, \quad R_{(M+1)/2} = 2 - \delta, \quad R_d = 0 \quad (d \neq 1, (1 + M)/2) \quad (3.58)$$

とすると、平均ポテンシャル U は、(3.30) 式より、

$$U = (M + 1)(-16 - \delta^2) / 32 \quad (3.59)$$

となり、 $\delta > 0$ のとき減小する。 U は極小とならないから、 $(M + 1)/2$ の単一モードは不安定である。

(3.50) 式をアナログ計算機でシミュレーションして、上記の解析結果を確かめた。特に、 $M = 5$ 段の接地系では、 $m = 1, 2, 4, 5$ の単一モード振動が各々安定に生じた。文献(3)は、定在波の節が発振器上にある単一モードはすべて不安定であるとしている。しかし、定在波の節が発振器上に最も多くある $(M + 1)/2 = 3$ の単一モードのみが不安定で、2, 4 の単一モードは安定に生じ、上記の解析結果と一致した (図 3.6(b))。このことは、デジタル⁽¹⁵⁾計算機シミュレーションによっても確かめられている。

3.7 能動素子を部分的に含むはしご状発振器

本節では、図 3.5 の系において、能動素子を部分的に含む系⁽⁴⁾を考える。この系の平均ポテンシャルは (3.30) 式で与えられる。その係数 a_{ml} , b_{ml} は (3.31) 式において、能動素子の装荷された段について、 k についての和をとることにより求まる。本節では、両端開放のはしご状発振器を考え、 P_{mk} は (3.51) 式で与える。発振器の段数 M と、能動素子の装荷パターンが与えられれば、 U の係数を (3.31) 式より求め、3.2 節のアルゴリズムを用いて、生じる振動をすべて求めることができる。 M 段のはしご状発振器には一般に 2^M 個の装荷パターンが考えられるが、モードの空間的な対称性 $P_{mk}^2 = P_{m, M+1-k}^2$ を考慮して、調べるべきパターンの総数を減らせる。

モード 1 およびモード $(1 + M/2)$ は、単一モード振動の十分条件 (3.47) 式を満たすから、装荷パターンによらず、常に単一モード振動として安定である。したがって、この 2 つのモードの少くとも一方を含む多重モード振動は、3.2 節 I の部分モードの禁止則により安定ではない。その他のモードは、種々の組み合わせにより多重モード振動を作る。

—— 数値例 ——

〔単一モードおよび 2 重モード振動〕

$M = 5$ 段、 $k = 1, 2$ に能動素子を装荷した場合、

単一モード振動 $m = 1, 2, 4$ の 3 通り、

2 重モード振動 3 と 5 の 1 通り

の計 4 種類の振動が安定になる。

$$P_1 = P_{11} / P_{12} \quad (3.60)$$

とおくと、 $1/P_2 = P_4 = 0.618$, $1/P_3 = P_5 = 0.382$, $P_1 = 1$

となっている。 P_2 , P_4 は、単一モードの十分条件 (3.37) 式を満たさないが、 P_3 , P_5 よりは 1 に近い。 P_3 , P_5 は 2 重モードの十分条件 (3.40), (3.44) 式を満たしている。

〔3 重モード振動〕

多重モード振動の上限則より、3 重モード振動を生じさせるには、少くとも 3 ケ所に飽和性素子が入らねばならない。モードの空間的な対称性より、はしご状発振器の右半分と左半分に入れられた素子は、独立した飽和として働かない。そこで、右 (左) 半分に 3 個の素子を入れるために、段数は少くとも $M = 5$ 段必要である。しかし、 $M = 5, 6, 8$ に対しては、いかなる装荷パターンに対しても 3 重モード振動は存在しない。 $M = 7$ および $9 \sim 20$ に対しては、表 3.1 に示す装荷パターンに対し 3 重モード振動が生じた。

例えば、 $M = 7$, $k = 1, 2, 3$ に能動素子を入れると、 $m = 3, 5, 7$ の 3 重モード振動、

(4, 5), (3, 6), (2, 7) の3種類の2重モード振動, $m=1$ の単一モード振動が生じる。 P_{mk}^2 の値を表3.2に示す。これらの値は, (3.48) 式の十分条件 ($n=3$) は満たせないが, P_{31}^2 , P_{52}^2 , $P_{73}^2 (=1.62)$ が大きく, 他が小さいという傾向は一致する。

〔4重モード振動〕

$M=1 \sim 14$ では4重モード振動は生じない。 $M=15$ で, 7個の能動素子を $k=1, 3, 4, 6, 8, 10, 15$, に装荷すると, $m=8, 10, 11, 12$ の4重モード振動が生じた。

一方, 4素子で4重モード振動を生じる最小段数は20段であった。この場合 $k=1, 4, 5, 9$ に能動素子を装荷すると, $m=4, 12, 14, 20$ の4重モード振動が生じた。 P_{mk}^2 は(3.48) 式の十分条件は満たさないが, $P_{4,1}^2$, $P_{12,4}^2$, $P_{14,5}^2$, $P_{20,9}^2$ が他よりも大きい。

表3.1 3重モード振動を生じる
装荷パターンと, 生じる
3重モード振動の例

段数 M	装荷パターン k	3重モード振動 m
7	1 2 3	3 5 7
8		no 3-mode
9	1 2 5	4 8 9
10	1 2 4	5 8 10
11	1 2 3	4 8 11
12	1 2 5	5 10 12
13	1 2 4	6 10 13
14	1 2 3	5 9 13
15	1 2 3	5 10 15
16	1 2 5	6 13 16
17	1 2 5	7 14 17
18	1 2 3	6 12 18
19	1 2 5	8 16 19
20	1 2 4	9 16 20

表3.2 はしご状発振器のモード形状
 $P_{mk}^2 (M=7)$

モード m	位 置 k						
	○ 1	○ 2	○ 3	4	5	6	7.
1	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
2	1.90	1.22	0.38	0.00	0.38	1.22	1.90
○ 3	1.62	0.10	0.78	2.00	0.78	0.10	1.62
4	1.22	0.38	1.90	0.00	1.90	0.38	1.22
○ 5	0.78	1.62	0.10	2.00	0.10	1.62	0.78
6	0.38	1.90	1.22	0.00	1.22	1.90	0.38
○ 7	0.10	0.78	1.62	2.00	1.62	0.78	0.10

$M=1 \sim 17$ では, いかなる装荷パターンに対しても5重以上の多重モード振動は見られなかった。しかし, M が充分大きくなれば, 適当な装荷パターンにより, 5重以上の多重モード振動も安定に生じるものと考えられる。

以上の結果から, 安定な振動状態が決定される機構は, 3.5節の満場一致原理を用いて次

のように説明できる。

各能動素子には、1個の周波数成分を主成分とする電圧が加わり、その振幅は素子にとって望ましい（平均ポテンシャルを最小とする）値に近いとする。この時、各能動素子から見ると、単一モード振動が生じている状態に近く、その素子の平均ポテンシャルは最小値に近い値となる。すべての能動素子が、このような状態にあれば、満場一致原理に従って、系全体の平均ポテンシャルも極小となり、この振動状態は安定となる。このような状態を1個のモードで満たすことができれば、単一モード振動が生じ、 m 個のモードで満たせば、 m 重モード振動が生じる。

この原理は、はしご状発振器に限らず、格子状結合された発振器群の場合⁽¹⁶⁾や、能動素子の特性が互いに異なる場合にも適用できると考えられる。

3.8 む す び

本章では、能動素子特性が3次式で表される多自由度発振器において、モード周波数間に共振のない場合に生じる非同期多重モード振動について考察した。この場合、平均ポテンシャルが2次形式となることを用い、非同期多重モード振動に関する一般的な法則を導いた。また、系に生じる振動をすべて求めるアルゴリズムを示した。さらに、単一モード振動や多重モード振動が生じるための十分条件を示し、その物理的意味を1個の能動素子の性質から説明する「満場一致原理」を述べた。

1個の能動素子では、単一モード振動が生じている時、平均ポテンシャルが最小となる。多数の能動素子をもつ系では、1個あるいは複数のモードの重ね合わせにより、各能動素子の平均ポテンシャルが最小に近い状態を実現できる時、この振動モードは安定となる。

以上の結果を用いて、全段あるいは部分的に能動素子の入ったはしご状発振器に生じる振動を求め、その物理的意味を満場一致原理に従って説明した。

4. 5 次特性の能動素子を用いた発振器

4.1 まえがき

本章では、能動素子特性が5次式で与えられ、硬発振特性を示す発振器を考える。

Schaffner⁽⁸⁾は、能動素子が1個の2自由度系を考え、能動素子が硬発振器特性である場合に非同期2重モード振動が生じる事を示した。Utkin⁽¹⁷⁾は、同様な回路で、一般に等振幅 m 重モード振動が生じることを示した。しかし、 m 重モード振動の振幅が等振幅のものに限られる事の明確な根拠を示していない。また、遠藤氏等^{(18),(19)}は、はしご状結合された発振器群において、能動素子特性が5次式で表される場合に、系に生じる単一モード、2重モード振動を解析している。しかし、3重モード以上の振動については言及しておらず、不等振幅2重モード振動は生じないとしている。

本章では、まず、5次特性の能動素子1個の性質を平均ポテンシャルを用いて調べる。次に、この性質を用いて、はしご状発振器に生じる振動を説明する。

4.2 1 個の能動素子を用いた発振器

4.2.1 系の記述と平均ポテンシャル

図4.1の回路を考える。非線形コンダクタンス $g(V)$ は次の硬特性をもつものとする。

$$\begin{aligned} i &= g(V) = g_1 V - g_3 V^3 + g_5 V^5 \\ &= \sqrt[4]{g_1/5g_5} \cdot g_1 \left(v - \frac{\beta}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし、 v 、 β は次式で与える無次元量である。

$$\begin{aligned} V &= \sqrt[4]{g_1/5g_5} v \\ \beta &= 3g_3/\sqrt{5g_1g_5} \end{aligned} \quad (4.2)$$

パラメータ β は、非線形抵抗特性の1次及び5次の項（原点付近及び飽和領域の正抵抗）を固定した時の、3次項の係数であり、能動素子（非線形抵抗）の負性抵抗部分の大きさを表す。図4.2に、 β のいくつかの値に対する非線形特性を示す。

3.4節と同様にして、各共振回路の損失 $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ は、能動素子特性 $g(V)$ に含めることができるか

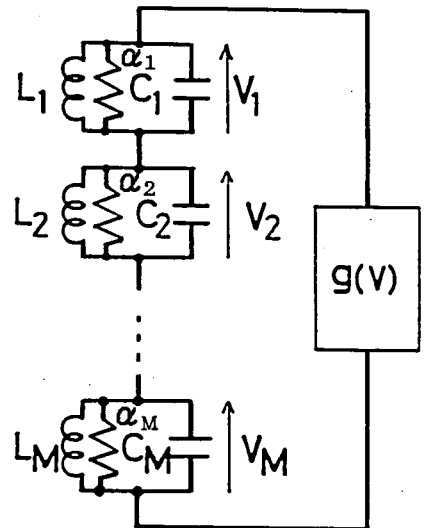


図4.1 1 個の能動素子をもつ多自由度発振器

ら, $\alpha_1 = \dots = \alpha_M = 0$ とおく。

2章に従って, 平均ポテンシャルを求める。能動素子は B_0 枝 (コンデンサ電圧で枝電圧の定まる枝) に分類され, 微小コンダクタンスをもつ。

したがって, これを開放除去して, 生成系を作る。

生成系の解は次のように書ける。

$$v = \sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (4.3)$$

一方, この系の電圧ポテンシャルは, (4.1) 式より次のようになる。

$$\begin{aligned} G(V) &= \int g(V) dV \\ &= \sqrt{g_1^3/5g_5} \left\{ \frac{v^2}{2} - \frac{\beta}{12} v^4 + \frac{v^6}{30} \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

(4.4) 式に (4.3) 式を代入して平均化すれば, 次のように平均ポテンシャル U^* が得られる。

$$\begin{aligned} U^*(r_1, \dots, r_M) \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \right] dt \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここで, 系の M 個の固有周波数 ω_m の間には, 簡単な関係がない, 非共振の場合を考える。

(4.5) 式の平均化操作は次のように計算できる。(付録 C)

$$\begin{aligned} U^*(r_1, \dots, r_M) \\ = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^M \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin \varphi_m \right] d\varphi_1 \dots d\varphi_M \\ = \sqrt{\frac{g_1^3}{80g_5}} U \\ U = \sum_{m=1}^M R_m - \frac{\beta}{8} \left\{ \sum_{m=1}^M R_m^2 + 4 \sum_{m=1}^{M-1} \sum_{l=m+1}^M R_m R_l \right\} \\ + \frac{1}{24} \left\{ \sum_{m=1}^M R_m^3 + 9 \sum_{m=1}^M \sum_{\substack{l=1 \\ l \neq m}}^M R_m^2 R_l + 36 \sum_{1 \leq m < l < k \leq M} R_m R_l R_k \right\} \end{aligned} \quad (4.6)$$

ただし, $R_m = r_m^2$ とおいた。

系の安定な振動状態は, ポテンシャル U^* (4.5) 式の極小点に対応する。以下, U^* を正定数倍した U の極小化問題を考える。すなわち, 系の安定な非同期多重モード振動を求めるこ

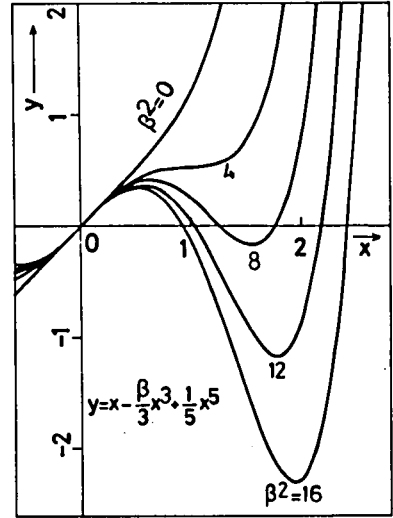


図 4.2 5 次式で表される能動素子特性

とは、次の問題に帰着する。

[平均ポテンシャルの極小化]

$R_1 \geq 0, R_2 \geq 0, \dots, R_M \geq 0$ の制約下で、 $U(R)$ を極小とする $R^* = (R_1^*, \dots, R_M^*)$ を求めよ。

一般に、 R^* が極小点である条件は次のように書ける。変数の入れ換えにより、

$$R_1^* > 0, \dots, R_m^* > 0, R_{m+1}^* = \dots = R_M^* = 0 \quad (4.7)$$

とする。

$$(i) \text{ 平衡条件 } \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{R=R^*} = 0 \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.8)$$

$$(ii) \text{ 抑制条件 } \left. \frac{\partial U}{\partial R_d} \right|_{R=R^*} > 0 \quad (d = m+1, \dots, M) \quad (4.9)$$

(iii) 正定値条件

U の Hessian 行列の $m \times m$ 小行列 $\partial^2 U / \partial R_i \partial R_j$ ($i, j = 1, \dots, m$) が正定値である。 (4.10)

4.2.2 m重モード振動の安定判別

この系では、多重モード振動のうち、モード振幅が等しいもののみが安定となりうる。

(証明) まず、2自由度の系で、不等振幅2重モード振動は安定でないことを示す。(4.6)式の平均ポテンシャルで $M=2$ の場合を考える。後の便利のため、定数 B, C を入れて一般化しておく。

$$U = C(R_1 + R_2) - B(R_1^2 + R_2^2 + 4R_1 R_2) + \frac{1}{24}(R_1^3 + R_2^3 + 9R_1^2 R_2 + 9R_1 R_2^2) \quad (4.11)$$

$\partial U / \partial R_1 - \partial U / \partial R_2 = 0$ より次式を得る。

$$(R_1 + R_2 - 8B)(R_2 - R_1) = 0 \quad (4.12)$$

$R_1 \neq R_2$ とおいて、 $\partial U / \partial R_1 = 0, \partial U / \partial R_2 = 0$ より、

$$\begin{aligned} R_1 &= 4B \pm 2\sqrt{C - 4B^2} \\ R_2 &= 4B \mp 2\sqrt{C - 4B^2} \end{aligned} \quad (4.13)$$

このとき、

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U}{\partial R_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial R_1 \partial R_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial R_1 \partial R_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial R_2^2} \end{pmatrix} = 4B^2 - C \leq 0$$

であるから、(4.13) 式の解の存在条件より U のヘシアン行列は正定値となりえない。したがって、(4.11) 式には $R_1 \neq R_2$ の極小点は存在しない。

次に M 自由度の場合を考える。不等振幅の多重モード振動が生じたとき、添字の入れ換えにより、 $R_1 \neq R_2$ 、 $R_1 > 0$ 、 $R_2 > 0$ として一般性を失わない。

(4.6) 式を、 R_1 、 R_2 に注目して書き直す。

$$\begin{aligned}
 U = & (R_1, R_2 \text{ を含まぬ部分}) \\
 & + (R_1 + R_2) \cdot \left[1 - \frac{\beta}{2} \sum_{m=3}^M R_m + \frac{3}{8} \sum_{m=1}^M R_m^2 + \frac{3}{2} \sum_{3 \leq k < l \leq M} R_k R_l \right] \\
 & + (R_1^2 + R_2^2 + 4 R_1 R_2) \cdot \left[-\frac{\beta}{8} + \frac{3}{8} \sum_{m=3}^M R_m \right] \\
 & + \frac{1}{24} (R_1^3 + R_2^3 + 9 R_1^2 R_2 + 9 R_1 R_2^2)
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

多重モード振動が安定ならば、 U は極小値をとるから、 U を R_1 、 R_2 のみの関数とみても、 U が極小となるはずである。しかし、前段で示したように、(4.10) 式のポテンシャルは $R_1 \neq R_2$ なる極小点をもたない。よって、 M 自由度系でも、不等振幅の多重モード振動は安定とならない。
(証了)

Utkin は、対称な系では対称な解がもっともらしいという論拠で、等振幅の m 重モード振動のみを考察しているが⁽¹⁷⁾、それは以上の性質により裏付けられた。

等振幅 m 重モード振動を次のようにおく。

$$R_1 = \cdots = R_m = R, \quad R_{m+1} = \cdots = R_M = 0 \tag{4.15}$$

平衡条件 (4.8) 式より、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial R_j} = 1 - \frac{\beta}{4} (2m-1)R + \frac{1}{8} (6m^2 - 9m + 4)R^2 = 0 \\
 (j = 1, 2, \dots, m)
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

抑制条件より、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial R_d} = 1 - \frac{\beta}{2} mR + \frac{1}{8} (6m^2 - 3m)R^2 > 0 \\
 (d = m+1, \dots, M)
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

また、ヘシアン行列は、

$$p = -\frac{\beta}{4} + \frac{1}{4} (3m-2)R$$

$$q = -\frac{\beta}{2} + \frac{3}{2}(m-1)R \quad (4.18)$$

とにおいて,

$$H = \begin{pmatrix} p & q & \cdots & q \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ q & & & q \\ q & \cdots & q & p \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

となる。

(4.16) 式を解いて, 振幅 R が定まる。

$$R = \frac{(2m-1)\beta \pm \sqrt{D}}{6m^2 - 9m + 4} \quad (4.20)$$

解の存在条件は

$$D = (2m-1)^2 \beta^2 - 8(6m^2 - 9m + 4) > 0 \quad (4.21)$$

(4.16) ~ (4.18) 式より, 次式が成立する。

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R_d} \right|_{R_d=0} = \frac{\partial^2 U}{\partial R_j^2} R_j + \frac{\partial U}{\partial R_j} \quad (j = 1, \dots, m) \quad (4.22)$$

(4.20) 式の安定解 (複号の+の方) は, $\partial^2 U / \partial R_j^2 > 0$, $\partial U / \partial R_j = 0$ をみたすから, (4.17) 式は常に成立する。(4.20) 式で, 複号の-は, 極小解を与えない。

次に正定値条件を考える。行列 (4.19) 式が正定値である必要十分条件は

$$\begin{aligned} p &> q \\ p + (m-1)q &> 0 \end{aligned} \quad (4.23)$$

で与えられる。これに (4.18) 式を代入して,

$$\beta > (3m-4)R \quad (4.24)$$

を得る。

(4.21), (4.24) 式より, m 重モード振動の生じるパラメーター範囲が定まる。

$$\begin{aligned} m=1 & \quad \beta^2 > 8 \\ m \geq 2 & \quad \frac{8(3m-4)^2}{6m^2 - 13m + 4} > \beta^2 > \frac{8(6m^2 - 9m + 4)}{(2m-1)^2} \end{aligned} \quad (4.25)$$

(4.25) 式より求めた m 重モード振動の生じる β の範囲を図 4.3 に示す。負性抵抗分 (β) が, ある程度 ($\sqrt{8}$) 以上大きくならないと, 発振が生じない。しかし, β が充分大となると,

能動素子の特性は、原点近傍を除くと、負性抵抗と飽和部分からなり、軟発振の能動素子と大差なくなる。したがって、 $\beta > 4$ では、3次特性の素子を用いた場合（3.4節参照）と同様に、単一モード振動しか生じなくなる。

結局、中位の β （3～4位）で、 β を適当に定めれば、任意の m 重モード振動（ $m \geq 2$ ）が生じ得る。例えば、 $3.15 < \beta < 3.24$ にとると、初期値の選択によって、無発振状態、単一モード、2重モード、3重モード振動のすべてが生じ得る。

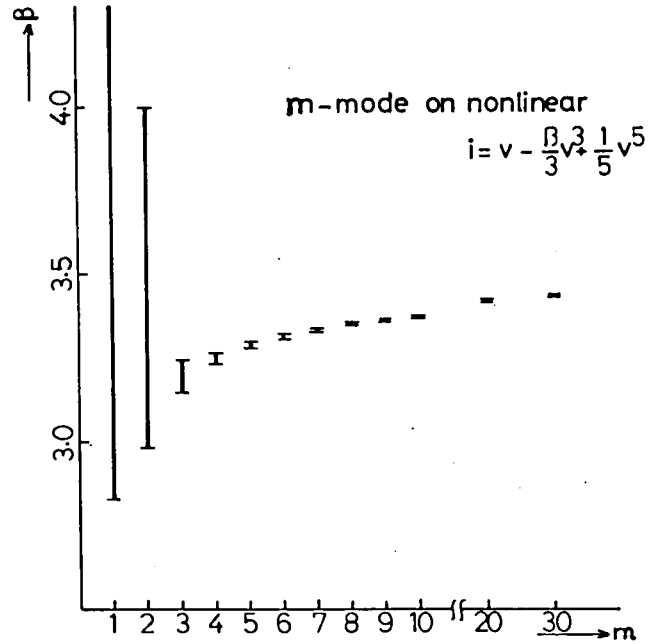


図 4.3 m 重モード振動の生じる β の領域

この程度の β の値で、（4.1）式の特性は最も硬発振特性らしい性質を発揮する。その特性形状（図 4.2）は、正の領域、負の領域がほぼ同じ大きさであり、直観的理解と一致する。

なお、 m の増大と共に、 m 重モード振動の安定範囲は狭くなり、 $m \rightarrow \infty$ で $\beta = \sqrt{12}$ に漸近する。この時、（4.1）式の特性はエルミート多項式で表されるものとなる。

また、 $(m+1)$ 重モードの生じるパラメータ領域で、必ずしも m 重モードが生じるとは限らないが、 m 重モード（ $m \geq 2$ ）の生じる領域で、必ず単一モード振動が生じる。

4.3.2 平均ポテンシャルの等高線図

系を2自由度の場合に限り、（4.6）式で与えられる平均ポテンシャルの等高線図を図 4.4(a)～(e)に示す。図中、数字は平均ポテンシャルの値を示す。○印はポテンシャルの極小点（池）にあたる安定平衡点、△印、×印は、山頂及び峠にあたる不安定平衡点を各々示す。

β を段々増加させていくと、無発振状態のみが安定な図 4.4(a)から $\beta = \sqrt{8}$ を境として、単一モードが安定となり、（ $2.82 < \beta < 2.98$ ；図 4.4(b)）、次に2重モードは安定となるが（ $2.98 < \beta < 4$ ；図 4.4(c)）、やがて2重モードは不安定となり、再び単一モードのみが安定となる（ $4 < \beta$ ；図 4.4(e)）。

単一モードや2重モード振動に対する平衡点は、 $r_1 + r_2 \approx 2 \sim 3$ を満たすほぼ直線状の「谷」の中にある。能動素子にかかる電圧の最大値（ $r_1 + r_2$ ）に平均ポテンシャルの値が

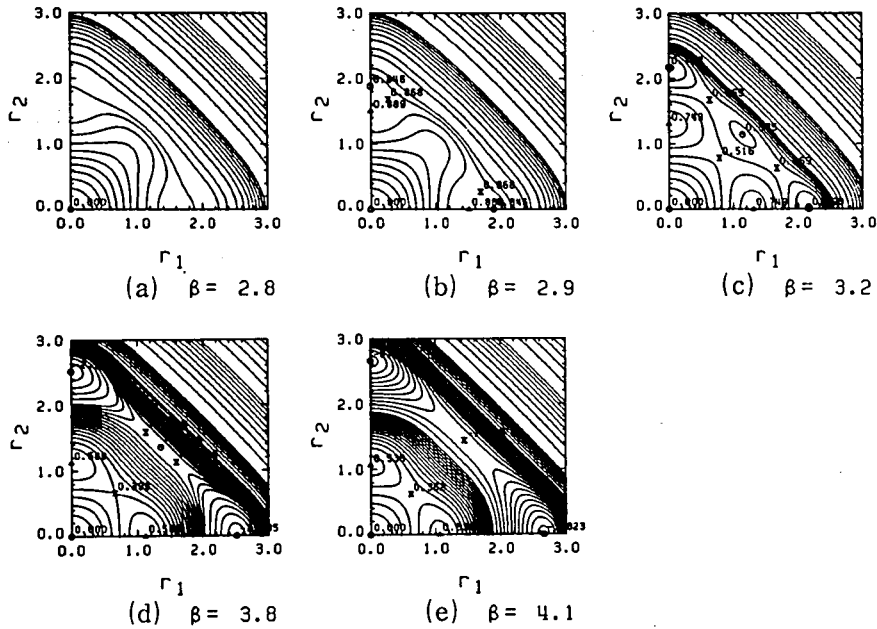


図 4.4 平均ポテンシャルの等高線図

大きく依存するため、このような「谷」が生じると考えられる。

図 4.4 (b) と (e) では、安定な平衡点が単一モードと無発振状態である点では似ているが、その初期値領域はまったく異なることが、図から読みとれる。

4.3 はしご状発振器

4.3.1 5 次特性の能動素子をもつはしご状発振器

本節では、5 次特性の能動素子をもつはしご状発振器の解析を行う。

3.6 節で述べた、3 次特性の能動素子をもつはしご状発振器に生じる振動は、3.5 節で述べた満場一致原理を用いて次のように説明できた。

- 1) 能動素子 1 個を考えると、単一モード振動が生じている時、平均ポテンシャルが極小となる。
- 2) いくつかのモードの組み合わせにより、各能動素子から生じる平均ポテンシャルが極小に近い状態を実現できれば、その振動モードは安定になる。

1 個の 5 次特性素子は、単一モード振動の他に、無発振状態や、各種の多重モード振動状態で、平均ポテンシャルが極小となる。したがって、5 次特性の能動素子をもつはしご状発振器では、3 次特性のはしご状発振器に比べて、より多くのモードの組み合わせの振動が安定

になると予想される。

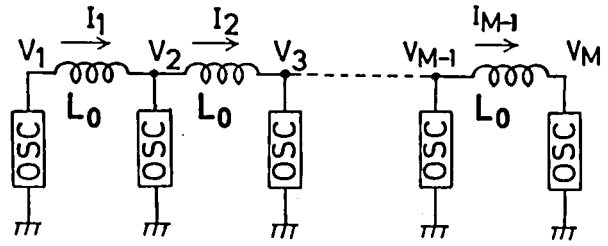
特に、1素子であっても多重モード振動が可能であるから、はしご状発振器でも、3重モード以上の発振も可能であろう。

本節では、平均ポテンシャルを用いて5次特性の能動素子をもつはしご状発振器の解析を行ない、これらの予想を確かめる。

4.3.2 系の記述

図4.5のようなはしご状発振器を考える。能動素子は、(4.1)式の5次式で表される特性をもつ。終端条件は、両端開放の場合を考える。系の回路方程式は次式となる。

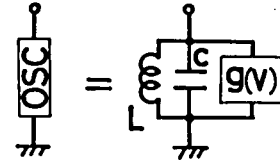
$$\begin{aligned}
 I_k &= \frac{1}{L_0} \int (V_k - V_{k+1}) dt \\
 I_{k-1} - I_k &= C \frac{dV_k}{dt} + \frac{1}{L} \int V_k dt + g(V_k) \\
 V_0 &= V_1, \quad V_{M+1} = V_M
 \end{aligned}
 \tag{4.26}$$



(a) Ladder Oscillator

能動素子を解放して $g(V) \equiv 0$ とおいた線形系の一般解は次の形に書ける。

$$\begin{aligned}
 V_k &= \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} v \\
 &= \sqrt[4]{\frac{g_1}{5g_5}} \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m \sin(\omega_m t + \theta_m)
 \end{aligned}
 \tag{4.27}$$



(b) Unit Oscillator

図4.5 はしご状発振器

ただし、 P_{mk} , ω_m は、(3.51)式と同様である。

この系の平均ポテンシャル U^* は、次のように計算できる。ただし、系の M 個の固有周波数 ω_m は互いに関係のない非共振の場合を考える。

$$\begin{aligned}
 G(V) &= \int g(V) dV \\
 &= \sqrt{g_1^3/5g_5} \left\{ \frac{v^2}{2} - \frac{\beta}{12} v^4 + \frac{v^6}{30} \right\} \\
 U^* &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{k=1}^M G(V_k) dt = M \sqrt{\frac{g_1^3}{80g_5}} U \\
 U &= \sum_{m=1}^M R_m - \frac{\beta}{8} \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M (2 - \delta_{ml}) g_{ml} R_m R_l
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{24} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M H_{klm} R_k R_l R_m \quad (4.28)$$

ただし,

$$g_{ml} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M P_{mk}^2 P_{lk}^2$$

$$= \begin{cases} 3/2 & m=l \text{ かつ } m \neq 1, 1+M/2 \\ 1/2 & m+l=M+2 \text{ かつ } m \neq 1, 1+M/2 \\ 1 & m=1 \text{ または } l=1 \text{ または } m=l=1+M/2 \\ & \text{または } (m+l \neq M+2 \text{ かつ } m \neq l) \end{cases} \quad (4.29)$$

また, H_{klm} は次のように与えられる。

$$H_{klm} = \begin{cases} h_{klm} & (k=l=m) \\ 3 h_{klm} & (k=l \neq m \text{ または } l=m \neq k \text{ または } m=k \neq l) \\ 6 h_{klm} & (k \neq l \neq m \neq k) \end{cases} \quad (4.30)$$

$$h_{klm} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M P_{ma}^2 P_{la}^2 P_{ka}^2$$

h は, 添字に対する対称性を考慮して次のように計算できる。

$$h_{11m} = \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M P_{ma}^2 = 1 \quad (m=1, \dots, M)$$

$$h_{1lm} = g_{lm}$$

$$h_{klm} = \frac{1}{4} \left\{ 4 + 2S(k-l) + 2S(l-m) + 2S(m-k) \right. \\ \left. + 2S(k+l-2) + 2S(l+m-2) + 2S(m+k-2) \right. \\ \left. + S(k+l+m-3) + S(k+l-m-1) + S(l+m-k-1) \right. \\ \left. + S(m+k-l-1) \right\} \quad (k, l, m > 1) \quad (4.31)$$

ここに, S は次の値をとる記号である。

$$S(m) = \begin{cases} (-1)^{m/M} & (m/M = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ 0 & (m/M \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \end{cases} \quad (4.32)$$

安定な多重モード振動は, $R_1 \geq 0, \dots, R_M \geq 0$ の制約下で, 平均ポテンシャル (4.28) 式の極小点を求めることにより得られる。 U が極小となる条件は, (4.8) ~ (4.10) 式で与えられる。ただし,

$$\frac{\partial U}{\partial R_i} = 1 - \frac{\beta}{4} \sum_{m=1}^M (2 - \delta_{mi}) g_{mi} R_m + \frac{1}{8} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^M H_{jki} R_j R_k$$

$$\frac{\partial U}{\partial R_i \partial R_j} = -\frac{\beta}{4} (2 - \delta_{ij}) g_{ij} + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^M H_{kij} R_k \quad (4.33)$$

(4.8) ~ (4.10) 式を解く計算は、モードの組み合わせによって複雑な場合分けを必要とし、容易ではないが、多様な振動が生じることが知られている⁽¹²⁾。しかし、次節に述べる物理的考察によれば、その中のいくつかの振動の安定性を簡単に知ることができる。

4.3.3 満場一致原理に基づく振動状態の予測

3.5 節で述べた、満場一致原理を、能動素子が5次特性のはしご状発振器に適用する。そのためには、1個の能動素子の性質の他に、はしご状発振器のモード形状 P_{mk} ((3.51) 式) を知る必要がある。これらのモード形状のうち、特徴あるものを図4.6に示す。なお、モード $1 + M/2$ および $1 + M/3$ は、 M が2および3の倍数のときのみ考える。

$$\begin{aligned} m=1 \quad P_{mk} &= 1 \\ & \quad (k=1, \dots, M) \\ m=1+M/2 \quad P_{mk} &= \pm 1 \\ & \quad (k=1, \dots, M) \\ m=1+M/3 \quad P_{mk} &= \pm \sqrt{6}/2 \\ & \quad (k \equiv 0, 1 \pmod{3}) \\ & \quad = 0 \quad (k \equiv 2 \pmod{3}) \\ m=1+2M/3 \quad P_{mk} &= \sqrt{2}/2 \quad (k \equiv 0, 1 \pmod{3}) \\ & \quad = -\sqrt{2}/2 \quad (k \equiv 2 \pmod{3}) \end{aligned}$$

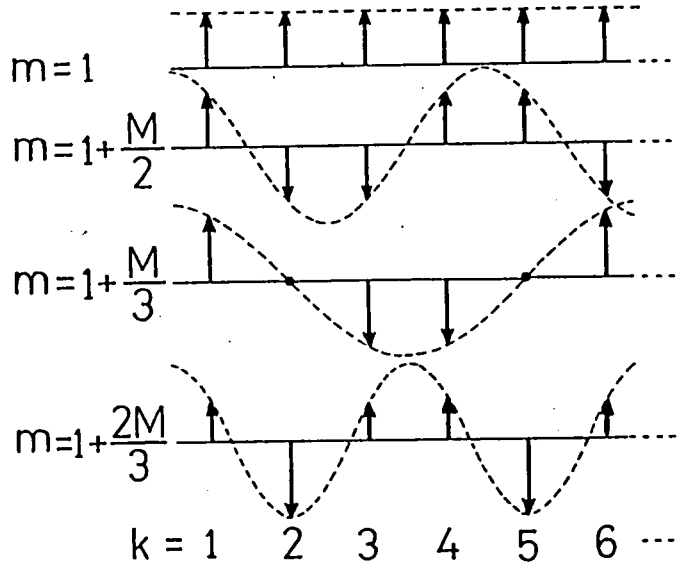


図4.6 特徴あるモードの形状

満場一致原理を具体的に適用する。

① k 番目の能動素子には、次の電圧がかかる。

$$v_k = \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m \sin \omega_m t \quad (4.34)$$

② 各能動素子の平均ポテンシャル U_k は、次に示す振動状態において極小となる。

無発振状態 (以下、N状態と略記する)

$$v_k = 0 \quad (4.35)$$

単一モード発振状態 (S 状態)

$$v_k = \overline{r_1} \sin \omega t \quad (4.36)$$

ただし, $\overline{r_1}^2 = \beta + \sqrt{\beta^2 - 8}$

2 重モード発振状態 (D 状態)

$$v_k = \overline{r_2} \sin \omega t + \overline{r_2} \sin \omega' t$$

$$\overline{r_2} = (3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 80})/10 \quad (4.37)$$

③ (4.34) 式の r_m を調節して, すべての v_k を, (4.35) ~ (4.37) 式に示す状態のいずれかにする。

④ 各能動素子の平均ポテンシャル U_k は極小となるから, 系全体の平均ポテンシャルも極小となり, 振動は安定となる。

この手順に従って, 具体例を掲げる。

(0) 発振停止状態: 各素子は N 状態であり, 各素子の U_k は極小となる。

(1a) $m = 1$, $m = 1 + M/2$ の単一モード振動

$$r_m = \overline{r_1}, \quad r_d = 0 \quad (d \neq m) \quad (4.38)$$

とすると, $|P_{mk}| = 1$ であるから, 各能動素子には (3.46) 式で示す電圧がかかり, S 状態となる。

(1b) $m = 1 + M/3$ の単一モード振動

$$r_m = \sqrt{2/3} \overline{r_1}, \quad r_d \neq 0 \quad (d \neq 1 + M/3) \quad (4.39)$$

とすると, $k \equiv 0, 1 \pmod{3}$ の能動素子には, (4.36) 式で示す電圧がかかり S 状態となる。 $k \equiv 2$ の素子では, $v_k \equiv 0$ であり, N 状態である。

(2a) $m = 1$, $l = 1 + M/2$ の 2 重モード振動

$$r_1 = \overline{r_2}, \quad r_{1+M/2} = \overline{r_2}, \quad r_d = 0 \quad (d \neq 1, 1 + M/2) \quad (4.40)$$

とすると, 各能動素子には, (4.37) 式に示す電圧がかかり, 各素子は D 状態となる。

(2b) $m = 1 + M/3$, $l = 1 + 2M/3$ の 2 重モード振動

$\beta = 3$ のとき, $\overline{r_1} = 2\overline{r_2}$ であるから,

$$r_{1+M/3} = \sqrt{2/3} \overline{r_2} = \sqrt{6}/3$$

$$r_{1+2M/3} = \overline{r_1} / \sqrt{2} = \sqrt{2} \quad (4.41)$$

とおくと, $k \equiv 0, 1 \pmod{3}$ の素子には (4.37) 式の D 状態の電圧, $k \equiv 2$ の素子には, S 状態の電圧がかかる。

上に述べた振動状態では, 各能動素子は, 発振停止状態 (N), 単一モード発振状態 (S), 2 重モード発振状態 (D) のいずれかの状態をとり, その平均ポテンシャルは極小である。

その総和である系全体の平均ポテンシャルも極小となり、満場一致原理に従って、これらの振動は安定となることがわかる。

このように、満場一致原理を完全に満たす振動を、以下「自然な振動」と呼ぶ。

3章で述べた3次特性の能動素子をもつはしご状発振器の場合と同様に、この原理が近似的に満たされる状態も安定になると考えられる。次節以下では、この予想を確かめるために、平均ポテンシャル(4.28)式の極小点を、(4.8)～(4.10)式より求める。

4.3.4 単一モード振動の安定性

モード l の単一モード振動の振幅、安定性は、(4.8), (4.9), (4.33)より次のようになる。

$$R_l = \frac{\beta g_{ll} + \sqrt{\beta^2 g_{ll}^2 - 8H_{ll}}}{H_{ll}} \quad (4.42)$$

$$1 - \frac{\beta}{2} g_{ld} R_l + \frac{1}{8} H_{ld} R_l^2 > 0$$

$$(d = 1, 2, \dots, M, d \neq l) \quad (4.43)$$

これらに、 g , H の値を分類して代入することにより、前述の自然なモード(1a), (1b)の他に、次の単一モード振動が生じることがわかる。

$$(1c) \quad m = 2, \dots, M, \quad m \neq 1 + M/3, 1 + M/2, 1 + 2M/3$$

$$R_m = 3(\beta + \sqrt{\beta^2 - 80/9})/5 \quad (4.44)$$

$$\text{安定条件} \quad \sqrt{80/9} < \beta < \sqrt{400/29}$$

このモードでは、各能動素子にかかる電圧は、大小様々な値をとる。各素子の平均ポテンシャルは、発振停止、単一モードの2つの状態で極小となるので、多くの素子で平均ポテンシャルが極小に近くなり、全体として安定な振動になると説明できる。

4.3.5 2重モード振動の安定性

安定な等振幅2重モード振動は、前節と同様にして、自然なモード(2a)の他に次の2通りであることがわかる。

$$(2c) \quad m = 2, \dots, M, \quad l = M + 2 - m$$

$$(m \neq 1 + M/3, 1 + M/2, 1 + 2M/3)$$

$$R_m = R_l = 5(\beta + \sqrt{\beta^2 - 224/25})/14 \quad (4.45)$$

$$\text{安定条件} \quad \sqrt{32/3} < \beta$$

$$(2d) \quad m = 1 + M/5, \quad l = 1 + 3M/5$$

$$R_m = R_l = 14(\beta + \sqrt{\beta^2 - 440/49})/55 \quad (4.46)$$

$$\text{安定条件 } \sqrt{440/49} < \beta < \sqrt{40/3}$$

(2c)の2重モード振動の成分のモード m , $M+2-m$ は、相補的な形をしている。

$$P_{mk}^2 + P_{M+2-m,k}^2 = 2 \quad (k = 1, \dots, M) \quad (4.47)$$

すなわち、モード m が小さく印加する素子は、モード $M+2-m$ は小さく印加し、各素子の状態は、図4.4の「谷」の中にある。したがって、この2重モード振動では、すべての素子が平均ポテンシャル極小に近い状態にあり、「満場一致原理」が近似的に成立していると考えられる。この振動は、3.6節で述べたように、能動素子特性が3次式の場合にも存在している。 β が大となると5次特性の形は3次特性に似てくることから、この振動の安定範囲に β の上限がないことが理解できる。

(2d)の構成モードも特徴ある形である。

$$\begin{aligned} P_{mk} &= 0, \quad P_{lk} = 0 & k &\equiv 3 \pmod{5} \\ P_{mk}^2 + P_{lk}^2 &= 5/2 & k &\not\equiv 3 \pmod{5} \end{aligned} \quad (4.48)$$

すなわち、 $k \equiv 3$ の能動素子は、発振停止状態、 $k \not\equiv 3$ の素子は、相補的2重モード振動の状態にある。なお、この振動は、文献(18)の分類では欠落していた。

さて、相補的2重モード振動(2c)の組み合わせからは、 $1+M/3$, $1+2M/3$ の組が除外されている。この組合せは、 $\beta=3$ のとき、(2b)の自然な2重モード振動であり、前述のように2つの構成モード成分は等振幅ではない。このモードの振幅を数値的に求めた結果を、いくつかの β に対し、表4.1に示す。この振動の安定条件は

$$\infty > \beta > 2.942 \quad (4.49)$$

であった。

表4.1 不等振幅2重モード振動の振幅

β	$R_{1+M/3}$	$R_{1+2M/3}$
3.0	0.667	2.000
3.5	1.196	2.795
4.0	1.546	3.413
6.0	2.693	5.596
20.0	9.722	19.631

文献(18)は、このような不等振幅2重モード振動の存在を否定しているが、 $M=3$ 段、 $\beta=3.5$ の系に対して、回路方程式(4.26)式をシミュレートして、この振動を確かめるこ

とができた。出力波形を図 4.7 に示す。

なお、 $m = 1 + M/3$ 、 $l = 1 + 2M/3$ 以外に安定な不等振幅 2 重モード振動が存在するか否かは、未解決である。

4.3.6 3 重モード振動の安定性

5 次特性の能動素子を 1 個用いることにより、4.1 節で示したように、3, 4, … 重モードが安定に生じる。したがって、多くの能動素子を用いたはしご状発振器でも、3, 4, … 重モード振動が発生しても何ら不思議ではない。

一般的な 3 重モード振動についての議論は、場合が非常に多くなり困難であるので、安定な 3 重モード振動の例を 1 つあげるに止める。

$$M = 7 \text{ 段}$$

$$R_2 = R_4 = R_6 = 22/145 \left(\beta + \sqrt{\beta^2 - 1160/121} \right) \quad (4.50)$$

$$R_1 = R_3 = R_5 = R_7 = 0$$

数値的に安定条件 (4.9), (4.10) 式を計算して求めた安定範囲は、

$$3.096 < \beta < 4.064$$

であった。

M を大きくとれば、4 重モード以上の多重モード振動も生じるものと予想される。

4.4 む す び

本章では、硬発振特性をもつ多自由度発振器を、平均ポテンシャルを用いて解析した。

まず、1 個の 5 次特性の能動素子と、多くの共振回路からなる発振器の平均ポテンシャルを導き、任意の非同期多重モード振動が安定に生じることを示した。また、2 自由度系の平均ポテンシャルを、等高線図を用いて図示した。

次に、5 次特性の能動素子をもつはしご状発振器を取り上げ、この系に生じる振動の発生機構を満場一致原理によって説明した。すなわち、各能動素子の平均ポテンシャルが小さくなるように、いくつかのモードが組み合わせあって、安定な多重モード振動が作られる。この

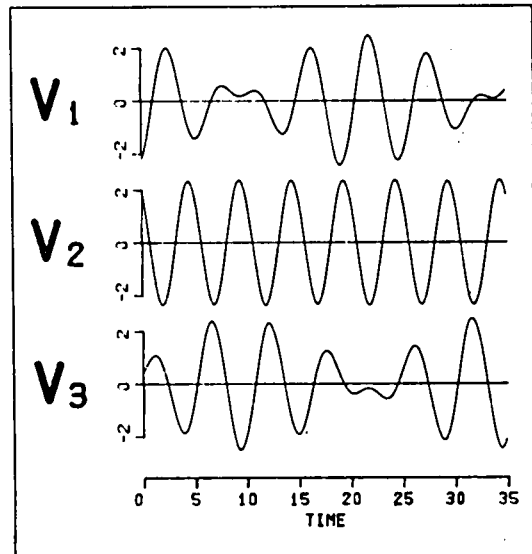


図 4.7 不等振幅 2 重モード振動のシミュレーション波形

物理的考察に基づき，不等振幅 2 重モード振動，3 重モード振動の存在を明らかにした。

このように，平均ポテンシャルを用いた物理的考察は，多自由度発振器の振舞いを知るのに有効である。では，能動素子の特性によって，1 個の能動素子の多周波成分に対する振舞いが異なるのはなぜだろうか。これは，次章で明らかにされる。

5. 印加電圧の分布関数を用いた多重モード振動の発生機構の説明

5.1 ま え が き

本章では、平均ポテンシャルを導出する際の平均化操作を、能動素子に加わる電圧の分布密度関数を用いて解釈することにより、多重モード振動の生じる機構を明らかにする。

前章までに述べたように、はしご状発振器のように多くの能動素子をもつ多自由度発振器に生じる現象は、1個の能動素子の性質、すなわち、1個の能動素子を用いた発振器において、どのような振動モードが安定となるかという性質から、かなりの部分が説明できた。

そこで、次に残された問題点として、軟発振特性の能動素子を用いると単一モード振動しか生じないが、硬発振特性の能動素子を用いると2重モード振動が安定に生じるという点を説明する。

Disman等は、バイアスの変動を考えたC級発振器に2重モード振動が生じる理由を、大小2つの信号の利得の差である Discrimination⁽²⁰⁾ で説明した。しかし、Discrimination と素子特性の関係は不明解で、どのような素子特性に対して、どのような多重モード振動が生じるかという関係は明らかではない。

本章では、1個の能動素子と複数個の共振回路で構成した多自由度発振器を取り上げ、そこに生じる非同期多重モードの解析に現れる平均化操作の意味について考える。まず、素子に印加される電圧を確率変数とみなした分布密度関数を考え、平均化の操作を重み付積分の形に書き直す。次に、非同期多重モード振動に対する分布密度関数を具体的に求め、素子特性と多重モード振動の振幅から平均ポテンシャルが決定される機構を直観的に説明する。その結果、単一モードあるいは2重モード振動の生じる条件と素子特性の関係が明らかとなる。特に、系が対称であっても、非対称な不等振幅2重モード振動が生じる可能性を示す。また、1:1の同期が生じる場合の平均ポテンシャルと、非共振の場合のその関係を明らかにし、その関係を用いて、軟発振特性の能動素子1個を用いた発振器には、2重モード振動は生じないことを一般的に示す。

次に、素子特性が7次多項式で表される多自由度発振器を考察し、前述の予想通り、対称なシステムにも不等振幅2重モード振動が生じることを示す。さらに、能動素子特性に多数の極大、極小の存在する正弦関数で表される素子を用いた場合にも、同様の事実を確かめる。

5.2 分布関数の考え方

5.2.1 分布関数を用いた平均化の解釈

非線形抵抗(能動素子)の特性と、回路に生じる振動の関係を考えるため、もっとも簡単な多自由度発振器の例である図 5.1 の回路の解析法を振返ってみる。

回路方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} L_j \frac{di_j}{dt} &= V_j \\ C_j \frac{dV_j}{dt} &= -i_j - g(V) \quad (j=1, \dots, M) \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$V = V_1 + \dots + V_M$$

ここで、能動素子の特性 $i = g(V)$ は微小であると考え、2章に従い平均ポテンシャルを求める。まず、

(5.1) 式において、能動素子を開放除去し、 $g(V) \equiv 0$ とおいた線形系の一般解を求めると次式となる。

$$\begin{aligned} V_m &= r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \\ V &= V_1 + \dots + V_M = \sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \end{aligned} \quad (5.2)$$

ただし、 $\omega_m = 1/\sqrt{L_m C_m}$ 、 r_m 、 θ_m は積分定数である。一方、この系の電圧ポテンシャル $G(V)$ は次式で与えられる。

$$G(V) = \int i dV = \int g(V) dV \quad (5.3)$$

(5.3) 式に (5.2) 式を代入し、平均をとることにより平均ポテンシャル U が得られる。

$$\begin{aligned} U(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) \\ = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \right] dt \end{aligned} \quad (5.4)$$

安定な振動が生じている定常状態では、「損失分極小化原理」により平均ポテンシャルは極小値をとる。

ここで、(5.4) 式の平均化操作の意味を考えてみよう。 T が充分大きい時、 $0 \leq t \leq T$ の t において、 $V = \sum r_m \sin(\omega_m t + \theta_m)$ は、次式の値をとる。

$$-(r_1 + \dots + r_M) \leq V \leq (r_1 + \dots + r_M) \quad (5.5)$$

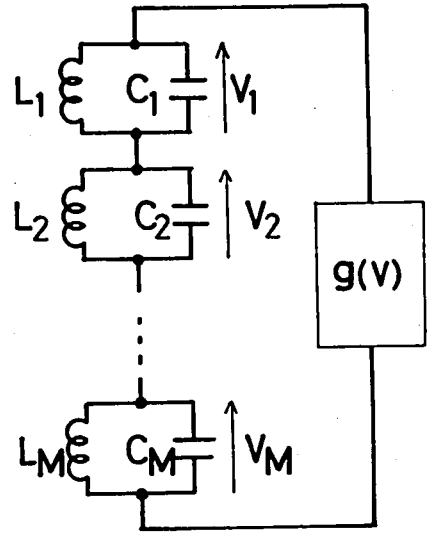


図 5.1 1 個の能動素子をもつ多自由度発振器

しかし、 V は、(5.5)式の区間の値を一様にとるのではなく、 V の値によって異なった頻度で出現する。そこで、 V をある分布に従う確率変数と考え、(5.4)式の平均を、その確率変数に関する $G(V)$ の平均と考えてみる。

$W(V; r, \theta)$ を、 V が従う分布の分布密度関数とする。すなわち、 t が $0 \leq t \leq T$ (充分大)の区間の値を一様にとる時、 V が区間 $[v_0, v_0 + \Delta v]$ の値をとる確率は、 $W(v_0) \cdot \Delta v$ となる。(5.4)式の平均は、 V がこの分布に従う時の期待値とみなせる。すなわち、

$$U(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(V) \cdot W(V; r, \theta) dV \quad (5.6)$$

(5.6)式の U が極小となるのは、 V が次のような分布を示す振動が生じる時である。

- $G(V)$ の小さい所で、 V の存在頻度 $W(V)$ が高い。
- $G(V)$ の大きい所で、 V の存在頻度 $W(V)$ が低い。

$G(V)$ は能動素子の特性のみから定まることに注意すると、安定な振動を求める問題は、次の2点に整理される。

- 1) $G(V)$ が極小となる V の値をさがす。
- 2) そこで $W(V)$ が大となる振動状態をさがす。

5.2.2 停留電圧

電圧ポテンシャル $G(V)$ を極小とする電圧を以下、停留電圧と呼ぶ。停留電圧では、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial V} &= i = g(V) = 0 \\ \frac{\partial^2 G}{\partial V^2} &= \frac{\partial i}{\partial V} > 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

すなわち、能動素子の電流 i 、微分コンダクタンスが正である。

ここで、図5.1の回路の LC 共振器のかわりに、コンデンサーをつないだ回路(図5.2)を考えると、停留電圧の意味が明らかになる。

図5.2の回路方程式は次の形である。⁽¹⁰⁾

$$C \frac{dV}{dt} = -i = -\frac{\partial G(V)}{\partial V} \quad (5.8)$$

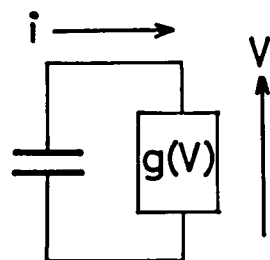


図5.2 コンデンサーにつないだ能動素子

(5.8)式は電圧ポテンシャル $G(V)$ の勾配系である。そこで、十

分に時間がたち、コンデンサーが完全に充放電すれば、 V は $G(V)$ を極小とする電圧（停留電圧）となる。

停留電圧は、損失分 $G(V)$ が小さくなるという意味で、能動素子にとって最も「望ましい」電圧である。この言葉を用いると、「安定な振動状態では、停留電圧付近で $W(V)$ が高い」と表現できる。

5.3 非同期多重モード振動の分布密度関数

以下、系の固有周波数 ω_m の間に適当な関係がなく、振動の位相関係が固定しない非同期多重モード振動を考え、これに対する分布密度の求め方を述べる。

まず、振幅 r の単一モード振動が生じる場合、(5.4)式の平均は、次のように書ける。

$$\begin{aligned} U(r) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(r \sin \omega t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} G(r \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (5.9)$$

$V = r \sin \varphi$ とおくと、(5.9)式は(5.6)式の重み付積分の形になる。ただし、分布密度 $W(V)$ は次式で表せる。

$$W_1(V; r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 - V^2}} & |V| < r \\ 0 & |V| > r \end{cases} \quad (5.10)$$

次に、多重モード振動に対する分布密度を求める。非共振の場合、(5.4)式は次の多重積分に書き替えられる。

$$\begin{aligned} &U(r_1, \dots, r_M) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G\left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m)\right] dt \\ &= \frac{1}{\pi^M} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} G\left[\sum_{m=1}^M r_m \sin \varphi_m\right] d\varphi_1 \dots d\varphi_M \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} W_1(V_1; r_1) \dots W_1(V_M; r_M) \\ &\quad \cdot G[V_1 + \dots + V_M] dV_1 \dots dV_M \end{aligned} \quad (5.11)$$

(5.11) 式において、 V_m は分布密度 $W_1(V_m; r_m)$ に従う独立な確率変数とみなせる。 $V = V_1 + \dots + V_M$ は、独立な確率変数 V_m の和であるから、 V の特性関数（分布密度関数のフーリエ変換）は、 V_m の特性関数の積となる。 V_m の特性関数は、(5.10) 式よりベッセル関数 J_0 である。これより、振幅 r_1, \dots, r_M の非同期 M 重モード振動に対する分布密度関数 W_M は、ベッセル関数 J_0 の積の逆フーリエ変換として、次の形に書ける。

$$W_M(V; r_1, \dots, r_M) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_0(r_1 u) \cdots J_0(r_M u) \cos uV \, du \quad (5.12)$$

このようにして、(5.4) 式の平均化操作は、 W_M を重みとした (5.6) 式の形で表せる。

なお、(5.12) 式より、 $W_M(V)$ は偶関数である。これは、(5.2) 式の V の対称性による。また、(5.12) 式の W_M は、次の形に規格化されている。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} W_M(V; r) \, dV = 1 \quad (5.13)$$

5.4 1 個の能動素子を用いた発振器の一般的性質

本節では、図 5.1 の多自由度発振器の、能動素子特性の具体的な形によらない一般的性質を調べる。

そのため、まず、系の平均ポテンシャルをより自由度の低い系の平均ポテンシャルに還元する「同期外れの公式」を導く。

5.4.1 同期外れの公式

非同期 M 自由度系の平均ポテンシャル $U_M(r_1, \dots, r_M)$ を、 $M-1$ 自由度系の平均ポテンシャル U_{M-1} から導く方法を述べる。 $M-1$ 自由度系に対する平均ポテンシャルは、(5.6)、(5.12) 式より次のように書ける。

$$W_{M-1}(V; r_1, \dots, r_{M-1}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_0(r_1 u) \cdots J_0(r_{M-1} u) \cos uV \, du \quad (5.14)$$

$$U_{M-1}(r_1, \dots, r_{M-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(V) W_{M-1}(V) \, dV \quad (5.15)$$

(21 Vol III P 205)

ここで、ベッセル関数に対する公式

$$J_0(a) J_0(b) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi J_0(\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}) \, d\theta \quad (5.16)$$

において、 $a = r_1 u$ 、 $b = r_2 u$ とおくと、(5.14) 式より、分布密度に対する同期外れの公式を得る。

$$W_M(V; r_1, r_2, \dots, r_M) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi W_{M-1}(V; \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \theta}, r_3, \dots, r_M) d\theta \quad (5.17)$$

(5.17) 式を (5.15) 式に代入して、次の平均ポテンシャルに対する同期外れの公式を得る。

$$U(r_1, r_2, \dots, r_M) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U_{M-1}(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \theta}, r_3, \dots, r_M) d\theta \quad (5.18)$$

これらの式を同期外れの公式と呼ぶ理由は次の解釈による。まず、(5.1) 式の M 自由度系において、 $\omega_1 = \omega_2$ である同期の場合を考える。この時、 V は次のように $M-1$ 個の正弦波の和となる。

$$\begin{aligned} V &= \sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \\ &= \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \theta} \sin(\omega_1 t + \varphi) \\ &\quad + \sum_{m=3}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \end{aligned} \quad (5.19)$$

ただし、 $\tan \varphi = (r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2) / (r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2)$

$$\theta = \theta_1 - \theta_2$$

したがって、 M 自由度系において、 $\omega_1 = \omega_2$ の同期が生じ、 $\omega_3, \dots, \omega_M$ は非共振である時の平均ポテンシャル $U_M(r_1, \dots, r_M, \theta)$ sync は、 $(M-1)$ 自由度系の平均ポテンシャル $U_{M-1}(r_2, \dots, r_M)$ と次の関係にある。

$$\begin{aligned} U_M(r_1, \dots, r_M, \theta)_{\text{sync}} \\ = U_{M-1}(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2 r_1 r_2 \cos \theta}, r_3, \dots, r_M) \end{aligned} \quad (5.20)$$

ここで、 $\omega_1 \neq \omega_2$ とし、同期が外れた状態を考える。 $\theta = (\omega_1 - \omega_2) t$ とおくと、(5.19) 式には M 個の周波数成分 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_M$ が現れる。

(5.20) 式を θ について平均し、 $|\omega_1 - \omega_2|$ の周波数成分を落とせば、これは非同期 M 自由度系の平均ポテンシャル U_M と一致するはずであり、その結果 (5.18) 式が得られる。すなわち、同期時の平均ポテンシャルを位相差について平均すれば、非同期時の平均ポテンシャルが得られる。

M 自由度系の平均ポテンシャル U_M は、 M 次元空間 (r_1, \dots, r_M) 上で定義されるが、

(5.1) 式の系のように能動素子を1個しか含まない系では、1自由度系の平均ポテンシャル $U_1(r)$ が与えられれば、(5.18) 式をくりかえし用いて、 U_M が導出できる。

5.4.2 1個の能動素子を用いた発振器の一般的性質

同期外れの公式を用いて、図5.1の多自由度発振器の非同期動作について、いくつかの一般的性質を導く。

〔I〕 多重モード振動の安定性の保存則

(5.1) 式の系において、 M 自由度系において M 重モード振動が安定ならば、 $(M+m)$ 自由度系 ($m \geq 1$) においても、この M 重モード振動は安定となる。いいかえると、 M 個の共振回路と組み合わせると M 重モード振動が生じるような能動素子1個を用いた多自由度発振器に、 m 個の共振回路を付け加えても、始めの M 重モード振動の安定性は乱されない。ただし、付加する共振回路の周波数は、始めの M 個の周波数及びその結合調波と共振しないとす。 (証明は付録D参照)

〔II〕 軟発振特性における2重モード振動の禁止則

図5.1の系において、非同期2重モード振動が安定であるためには、1つの周波数の単一モード振動が、少なくとも2種類の振幅値 ($r=0$ の発振停止状態の場合も含む) で安定に生じることが必要である。したがって、一種類の振幅値でしか単一モード振動が生じない軟発振の素子を用いた発振器では、2重モード振動は発生しない (証明付録D)。

例えば、4.2節で述べた系において、2重モード振動が安定に生じるパラメーター範囲 $4 > \beta > \sqrt{80/9}$ は、単一モード振動が安定に生じる範囲 $\beta > \sqrt{8}$ に含まれ、発振停止状態と振幅が正の単一モード振動の2つが存在する。

また、3.4節で述べた軟発振の系においては、安定な単一モード振動の振幅が $r=2$ の1通りしかないことから、2重モード振動が生じないことがわかる。

5.5 2自由度系の振動の分布密度関数

5.3節において、平均ポテンシャルが分布密度を用いた積分 (5.6) 式で表され、したがって、分布密度の形がわかれば、電圧ポテンシャルの関係をを知ることができることを述べた。本節では、具体的に2自由度系の振動の分布密度を求める。そして、その形から安定な単一モード振動、2重モード振動の振幅のきまり方について、直観的な考察を加える。

まず、(5.10) 式を (5.17) 式に代入して積分する。

$$W_2(V; r_1, r_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi W_1(V; \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta}) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{(r_1+r_2)^2 - V^2 - 4r_1r_2 \sin^2\varphi}} \\
&= \frac{1}{\pi^2} \operatorname{Re} \frac{1}{\sqrt{(r_1+r_2)^2 - V^2}} K \left(\sqrt{\frac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2 - V^2}} \right) \quad (5.21)
\end{aligned}$$

ただし、 $K(k)$ は第1種完全楕円積分である。

(5.21) 式を楕円積分に対する公式^(21, 1, p228)で整理して、次式を得る。

$|V| < |r_1 - r_2|$ のとき

$$W_2(V; r_1, r_2) = \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{\sqrt{(r_1+r_2)^2 - V^2}} K \left(\sqrt{\frac{4r_1r_2}{(r_1+r_2)^2 - V^2}} \right)$$

$|r_1 - r_2| < |V| \leq r_1 + r_2$ のとき

$$W_2(V; r_1, r_2) = \frac{1}{\pi^2 \sqrt{r_1 r_2}} K \left(\sqrt{\frac{(r_1+r_2)^2 - V^2}{4r_1 r_2}} \right)$$

$r_1 + r_2 < V$ のとき

$$W(V; r_1, r_2) = 0 \quad (5.22)$$

図 5.3 に、いくつかの

r_1, r_2 のいくつかの値に
対する $W_2(V)$ の形を示す。

単一モード振動の分布密度
 $W_1(V)$ は、 $V = \pm r$ で、

2重モード振動の分布密度
 $W_2(V)$ は $\pm |r_1 - r_2|$ で、

各々 ∞ となる。5.2
節で述べたように、安定

な振動においては、これ
ら分布密度関数のピーク

は、 $G(V)$ の極小点（停留
電圧）付近に来る。また、

$W_2(V; r_1, r_2)$ は、 V
 $= \pm (r_1 + r_2)$ までの広

がりをもつ。そこで、 $G(V)$ の2つの停留電圧を $\pm V_1, \pm V_2$ としたとき、安定に生じると考
えられる振動と、その振幅概算値を示す。

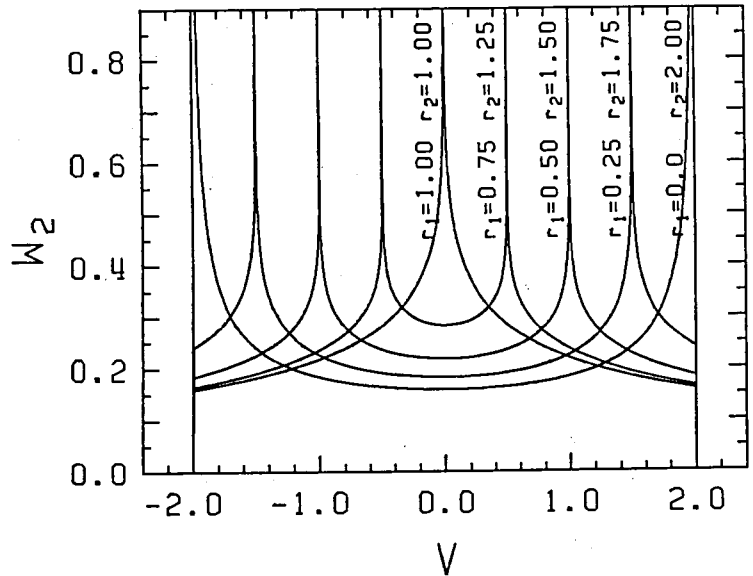


図 5.3 2 自由度系の振動の分布密度関数

単一モード振動

$$r \doteq V_1 \text{ および } r \doteq V_2 \quad (5.23)$$

2重モード振動

$$\begin{aligned} r_1 &\doteq |V_2 - V_1| / 2 \\ r_2 &\doteq (V_2 + V_1) / 2 \end{aligned} \quad (5.24)$$

〔例1〕 能動素子特性が3次式で表される軟発振特性

$$i = g(V) = \mu (-V + V^3/3) \quad (5.25)$$

(μ :微小)では、停留電圧は $V = \pm\sqrt{3}$ にあり、(5.23)式から $r = 1.7$ の単一モード振動の存在が予想される。実際、周知のように $r = 2$ の単一モード振動が生じる。この振幅の差は、(5.6)式において平均ポテンシャルの値が、停留電圧以外の電圧ポテンシャル値にも依存することによる。停留電圧は1個しか存在しないから、安定な2重モード振動は生じない。これは、5.4.2節 性質[Ⅱ]からもわかる。

〔例2〕 能動素子特性が5次式で表される硬発振特性(4.1)式の場合には、その電圧ポテンシャル(4.4)式で、

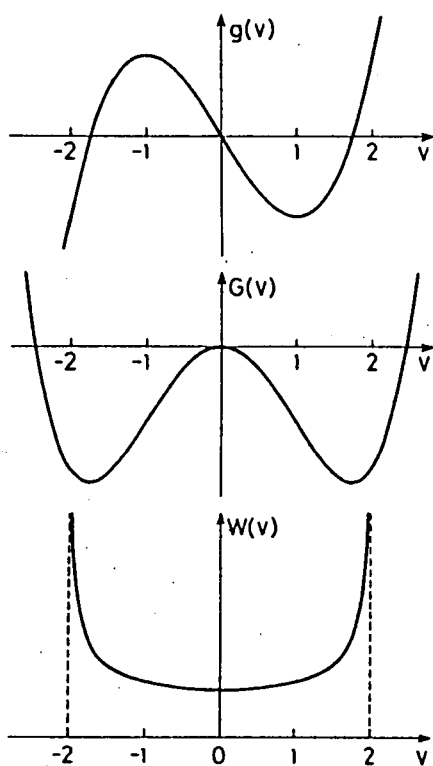
$$V_1 = 0, \quad V_2 = \pm \sqrt{\frac{5}{6} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 7.2})} \quad (5.26)$$

の3点で極小となる。 $\beta = 3.2$ のとき、これらの電圧(停留電圧)は、 $V_1 = 0$, $|V_2| = 2.03$ であり、(5.23), (5.24)式から、 $r = 2.03$ の単一モードおよび $r_1 = r_2 = 1.01$ の等振幅2重モード振動の発生が予想される。実際、4.2節で述べたように、 $r = 2.17$ の単一モードおよび $r_1 = r_2 = 1.14$ の2重モード振動が生じる。

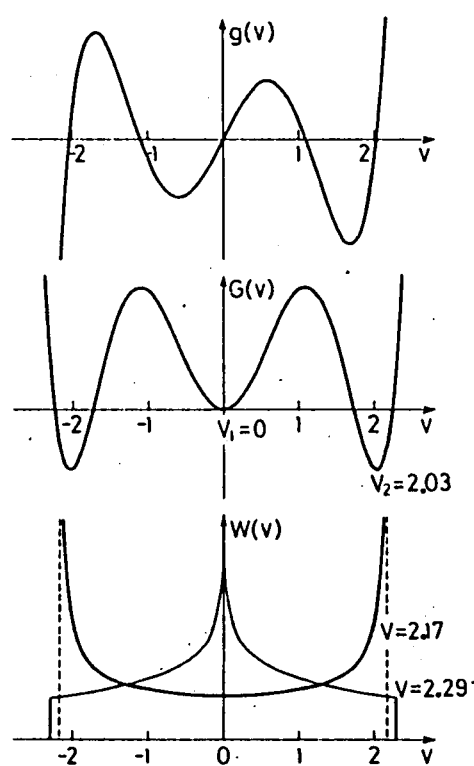
〔例3〕 0でない停留電圧($0 < V_1 < V_2$)をもつ素子は、回路が対称であっても、 $r_1 \neq r_2$ なる非対称の不等振幅2重モード振動の発生が予想される。これらは、実際、5.6節、5.7節において確かめられる。

図5.4に、例1、例2における素子特性 $g(V)$ 、電圧ポテンシャル $G(V)$ と、平均ポテンシャルを極小とする単一モード振動と2重モード振動の分布密度関数 $W(V)$ を示す。 $W(V)$ のピークが、 $G(V)$ の極小点(停留電圧)付近に来ることがわかる。

このように、(5.23), (5.24)式から推定される振幅の精度は必ずしも高くないが、複雑な計算に先立って、能動素子特性から現象の存在が予想できるところに、この考え方の特徴がある。



(a) Cubic Nonlinearity



(b) Fifth Order Nonlinearity ($\beta=3.2$)

図 5.4 能動素子特性、電圧ポテンシャルおよび生じる振動の分布密度関数

5.6 能動素子の特性が7次式で表される発振器

本節では、能動素子特性が7次式で表される2自由度発振器を取りあげる。固有周波数間に特定の関係のない非共振の場合に、どのような振動が安定になるかを考察し、上述の予想を確かめる。

5.6.1 7次式で表される素子特性

図 5.1 の回路において、能動素子の特性が次のような原点对称7次式で表される場合を考える。

$$i = -g_1 V + g_3 V^3 - g_5 V^5 + g_7 V^7 \quad (5.27)$$

(5.27) 式は変数変換 $V = \sqrt[6]{g_1/7g_7} v$ により次の形に書ける。

$$i = \mu \left(-v + \frac{\beta_3}{3} v^3 - \frac{\beta_5}{5} v^5 + \frac{\beta_7}{7} v^7 \right) \quad (5.28)$$

ただし,

$$\mu = g_1 \sqrt[6]{g_1 / 7 g_7}, \quad \beta_3 = 3 g_3 \sqrt[3]{\frac{1}{7 g_7 g_1^2}}, \quad \beta_5 = 5 g_5 \sqrt[3]{\frac{1}{49 g_7^2 g_1}}$$

ここで, μ が小さい弱損失の場合を考える。(5.28) 式より, 電圧ポテンシャル $G(V)$ は次式となる。

$$G(V) = \int i \, dV = g_1 \sqrt[3]{\frac{g_1}{7 g_7}} \left\{ -\frac{1}{2} v^2 + \frac{\beta_3}{12} v^4 - \frac{\beta_5}{30} v^5 + \frac{v^8}{56} \right\} \quad (5.29)$$

β_3, β_5 が適当な範囲では, (5.29) 式の曲線は, $v > 0$ の範囲に 2 個の極小点 V_1, V_2 をもつ。したがって, $r = V_1, r = V_2$ の大小 2 種類の単一モード振動および, $r_1 = (V_1 + V_2)/2, r_2 = |V_1 - V_2|/2$ の非対称な不等振幅 2 重モード振動が生じることが予想される。

5.6.2 平均ポテンシャルの導出

能動素子に印加する電圧 v を, 2 つの周波数成分の和とする。

$$v = r_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \quad (5.30)$$

ω_1, ω_2 は簡単な整数比の関係にないとして, 平均ポテンシャル U を求める。

$$g_1 \sqrt[3]{\frac{g_1}{7 g_7}} \cdot U = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(v) \, dt \quad (5.31)$$

$$\begin{aligned} U = & -\frac{1}{4} (R_1 + R_2) + \frac{\beta_3}{32} (R_1^2 + 4 R_1 R_2 + R_2^2) \\ & - \frac{\beta_5}{96} (R_1^3 + 9 R_1^2 R_2 + 9 R_1 R_2^2 + R_2^3) \\ & + \frac{5}{1024} (R_1^4 + 16 R_1^3 R_2 + 36 R_1^2 R_2^2 + 16 R_1 R_2^3 + R_2^4) \end{aligned} \quad (5.32)$$

ただし, $r_m^2 = R_m$ とおいた。

5.6.3 不等振幅 2 重モード振動の解析

(5.32) 式は, R_1, R_2 について対称式であるから, 次数を下げるため $w = R_1 + R_2, s = R_1 R_2$ とおく。

$$\begin{aligned} U = & -\frac{1}{4} w + \frac{\beta_3}{32} (w^2 + 2s) - \frac{\beta_5}{96} (w^3 + 6sw) \\ & + \frac{5}{1024} (w^4 + 12sw^2 + 6s^2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

w, s より, $R_1 \geq 0, R_2 \geq 0$ なる解が得られる条件は次の 3 式である。

$$\begin{aligned}
 w &\geq 0 \\
 s &\geq 0 \\
 w^2 &\geq 4s
 \end{aligned}
 \tag{5.34}$$

(5.34) 式の制約下で (5.35) 式の極小点を求めることにより、安定な振動が得られる。このように、変数変換に対して U の極小性が保たれることは、平均ポテンシャル法の長所の 1 つである。

このようにして、各振動の生じる領域を図 5.5 にまとめる。各領域 A, B, C, D_1 , D_2 の中で、表 5.1 のような振動が安定となる。

このように、この系では A で示す領域で、予想された不等振幅の 2 重モード振動が安定に生じる。

A 領域のパラメーター $\beta_3 = 6.75$, $\beta_5 = 5.5$ に対して、素子特性、電圧ポテンシャル $G(V)$, および生じる 3 種類の振動に対する分布関数 $W(V)$ を図 5.6 に示す。 $G(V)$ の極小点は、 $V_1 = 0.78$, $V_2 = 2.15$ にある。(5.23) (5.24) 式より、次の振動振幅が推定される。

単一モード振動：

$$r = 0.78, r = 2.15$$

2 重モード振動：

$$r = (1.47, 0.69)$$

(5.35)

これに対し、(5.33) 式の極小点より求めた振幅を示す。

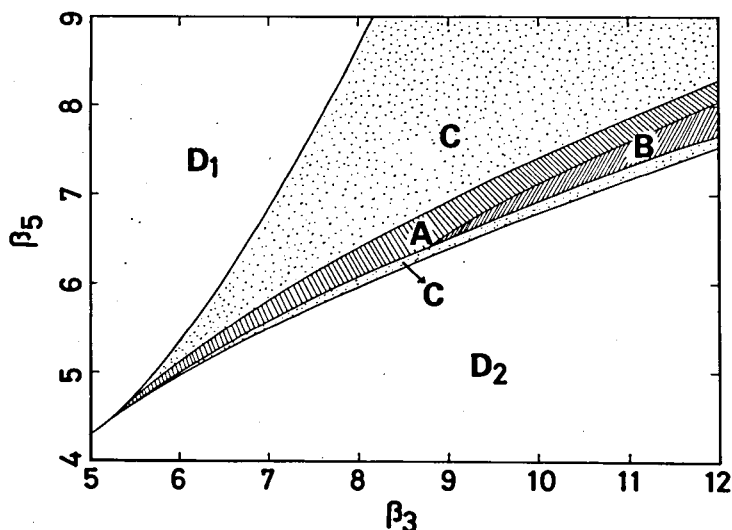


図 5.5 各種振動の発生領域

表 5.1 パラメータ領域と生じる振動

領域	単一モード振動		2 重モード振動	
	小 振 幅	大 振 幅	等 振 幅	不 等 振 幅
A	○	○	×	○
B	○	○	○	×
C	○	○	×	×
D_1	×	○	×	×
D_2	○	×	×	×

○印：安定，×印：不安定

単一モード振動： $r = 0.93$, $r = 2.23$

2重モード振動： $r = (1.52, 0.78)$

(5.36)

これらは、(5.35)式の推定値に近い。

2重モード振動が安定となるパラメーター領域では、大振幅と小振幅の2種類の単一モード振動が生じる。

このようなパラメーターで電圧ポテンシャル $G(V)$ (5.29)式のグラフを考えると、内側および外側の2組の極小と、その間にはさまれた極大が存在し、それらの大きさがほぼ等しくなっている。このように、ほぼ同じ大きさの等しい極大、極小をくり返す特性において、最も多種類の振動が生じることがわかる。

5.7 能動素子特性が正弦関数で表される発振器

前節の結果から、系に複雑な多重モード振動が生じるのは、能動素子の特性に山と谷があり、その大きさがほぼ揃っている場合であることがわかる。そこで、そのような特性の代表例として、能動素子の特性が正弦関数で表される場合を考える。

これは、Stokerの述べた多数のリミットサイクルをもつ1自由度発振器⁽²²⁾の例を多自由度系に拡張した場合である。この素子特性の電圧ポテンシャルは、電

圧 v の増加に対して極小値と極大値をくり返し続けるから、系には無数に多くの種類の振動が安定に生じることが予想される。この場合、系の平均ポテンシャルはベッセル関数の積の形に書け、容易にその極小点を見出せるので、この予想が確かめられる。

5.7.1 原点付近が正抵抗の場合

図5.1の回路で、能動素子の特性が次式で表される場合を考える。

$$i = g(V) = I_0 \sin (V / V_0) \quad (5.37)$$

$$(I_0 > 0, V_0 > 0)$$

電圧ポテンシャル $G(V)$ は、余弦関数となる。

$$G(V) = \int i dV = -I_0 V_0 \cos (V / V_0) \quad (5.38)$$

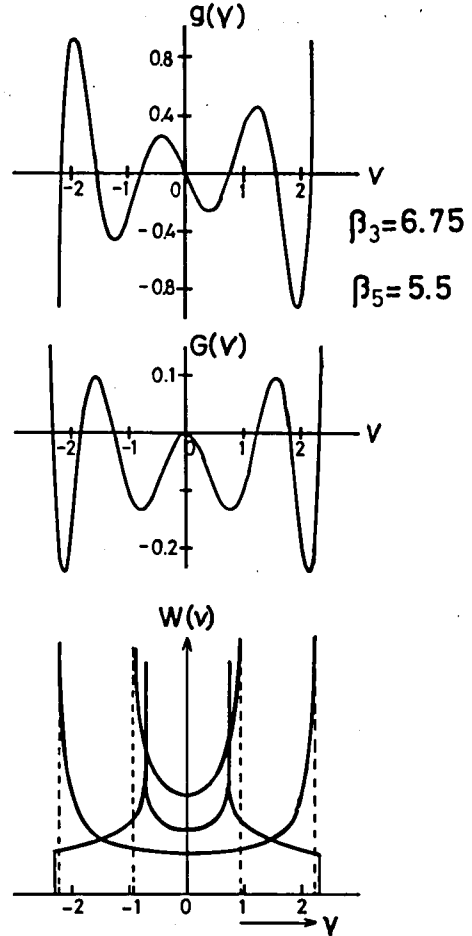


図5.6 能動素子特性、電圧ポテンシャルおよび生じる振動の分布密度関数

能動素子に印加する電圧 V を、 M 個の周波数の和で次の形に書く。

$$V = \sum_{k=1}^M V_0 \cdot r_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \quad (5.39)$$

(5.39) 式を (5.38) 式に代入して平均化することにより、平均ポテンシャル U が求まる。

$$U = -J_0(r_1) \cdot \dots \cdot J_0(r_M) \quad (5.40)$$

(5.40) 式の U が極小となる条件を考える。まず、平均ポテンシャルの平衡条件は次のようになる。

$$\frac{\partial U}{\partial r_l} = J_1(r_l) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^M J_0(r_k) = 0 \quad (5.41)$$

(5.41) 式より $J_1(r_l) = 0$ 、または $\prod J_0(r_k) = 0$ であるが、 $\prod J_0(r_k) = 0$ となる解は極小点を与えないことが容易にわかる。

よって、(5.41) 式をみたす r_l は、 J_1 の零点でなければならない。以下、 $J_1(z)$ の k 番目の零点を $j_{1,k}$ と記す。

なお、 $r_d = 0$ である不活性モードについては、 $J_1(0) = 0$ より (5.41) 式が自然に成立する。

関数 U が極小となるためには、そのヘシアン行列が正定値とならなければならない。(5.40) 式より、(5.41) 式の解に対し次が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r_l^2} &= [J_0(r_l) - \frac{1}{r_l} J_1(r_l)] \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l}}^M J_0(r_k) \\ &= \prod_{k=1}^M J_0(r_k) = -U \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r_l \partial r_{l'}} = -J_1(r_l) \cdot J_1(r_{l'}) \cdot \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq l, l'}}^M J_0(r_k) = 0 \quad (l \neq l') \quad (5.43)$$

したがって、 U のヘシアン行列は対角行列であり、これが正定値となる条件は次となる。

$$-U = \prod_{k=1}^M J_0(r_k) > 0 \quad (5.44)$$

$J_0(j_{1,k})$ の符号は $(-1)^k$ と同じになることが知られている。そこで、(5.40)、(5.44) 式より、(5.40) 式の極小点、すなわち安定な m 重モード振動の振幅 (r_1, \dots, r_M) は、次のように定まる。

1) r_1, \dots, r_M のうち、 2ℓ 個は奇数番目の J_1 の零点 $j_{1,2\ell-1}$ に等しい。

$$(\ell = 0, 1, \dots, [m/2])$$

2) r_1, \dots, r_M のうち, $m - 2l$ 個は, 偶数番目 J_1 の零点 $j_{1, 2k}$ に等しい。

3) r_1, \dots, r_M のうち, $M - m$ 個は 0 である。

具体的には, 次のような振動が安定になる。

1) 単一モード振動

$$r = 7.02, 13.32, 19.61, \dots$$

2) 2重モード振動

$$(r_1, r_2) = (3.83, 3.83), (7.02, 7.02), (10.17, 10.17), (3.83, 10.17), \\ (7.02, 13.32), \dots$$

3) 3重モード振動

$$(r_1, r_2, r_3) = (3.83, 3.83, 7.02), (7.02, 7.02, 7.02), (3.83, 10.17, 7.02), \\ (13.32, 13.32, 13.32), \dots$$

このように, m が奇数, 偶数に拘わらず等振幅 m 重モード振動が安定となる。

5.7.2 原点付近が負性抵抗の場合

5.6節で述べた7次特性の素子の場合と同様に, $v = 0$ 付近で負性抵抗をもつ正弦関数特性の能動素子を考える。素子特性を, (5.37) 式の符号を変えた形に仮定する。

$$i = g(V) = -I_0 \sin(V / V_0) \quad (5.45)$$

(5.40) 式に対応して, 次の平均ポテンシャルが得られる。

$$U = J_0(r_1) \cdot \dots \cdot J_0(r_M) \quad (5.46)$$

(5.46) 式を極小とする r_1, \dots, r_M は, 前と同様に, J_1 の零点 $j_{1, k}$ で与えられる。ただし, 正定値条件は (5.44) 式の符号を変えた次式となる。

$$U = \prod_{k=1}^M J_0(r_k) < 0 \quad (5.47)$$

安定な m 重モード振動の振幅 (r_1, \dots, r_M) は次のように定まる。

1) r_1, \dots, r_M のうち, $(2l - 1)$ 個は奇数番目の J_1 の零点 $j_{1, 2k-1}$ に等しい。

$$(l = 1, 2, \dots, [m/2])$$

2) r_1, \dots, r_M のうち, $(m - 2l + 1)$ 個は, 偶数番目の J_1 の零点 $j_{1, 2k}$ に等しい。

3) r_1, \dots, r_M のうち, $M - m$ 個は 0 である。

具体的には, 次のような振動が安定になる。

1) 単一モード振動

$$r = 3.83, 10.17, 16.47, \dots$$

2) 2重モード振動

$$(r_1, r_2) = (3.83, 7.02), (7.02, 10.17), (10.17, 13.32), (3.83, 13.32), \\ (7.02, 16.47), \dots$$

3) 3重モード振動

$$(r_1, r_2, r_3) = (3.83, 3.83, 3.83), (10.17, 10.17, 10.17), \\ (3.83, 7.02, 7.02), (3.83, 7.02, 13.32), \dots$$

5.7.1節の場合と異なり、等振幅 m 重モード振動は m が奇数の場合に限り安定となる。したがって、2重モード振動は不等振幅のものに限られる。さらに、2重モード振動について、 $|r_1 - r_2|$ を求めると、電圧ポテンシャルの極小点 $\pi, 3\pi, 5\pi, \dots$ によく一致する。こうして、5.5節で述べた予想が確かめられた。

以上のように、能動素子の特性が多くの極大、極小をもつ正弦関数で表される場合、予想通り多種の多重モード振動が生じる事を示した。特に、2重モード振動については、素子特性が原点で正抵抗の場合には等振幅2重モード振動が生じるが、原点で負性抵抗の場合には不等振幅2重モード振動が生じることを明らかにした。

5.8 む す び

本章では、1個の能動素子と多くの共振回路からなる発振器に、非同期多重モード振動の生じる機構を、平均化操作の解釈を通して明らかにした。

まず、1個の能動素子を用いた多自由度発振器において、この系の平均ポテンシャルを導く過程の平均化操作を考察した。その結果、能動素子の印加電圧を確率変数と考え、その分布密度関数を重みとして電圧ポテンシャルを平均することにより、平均ポテンシャルが表されることを示した。

次に、非同期多重モード振動の分布密度関数を、特性関数を用いて求める方法を述べ、共振時の平均ポテンシャルと非共振時の平均ポテンシャルの関係を示す同期外れの公式を導いた。これを用い、1つの能動素子を用いた発振器では、2重モード振動が生じるならば、2種類以上の振幅の単一モード振動が生じること等を示した。

また、単一モード、2重モード振動の分布密度関数を具体的に求め、これを用いて電圧ポテンシャルの極小点から、生じる振動の振幅を簡単に推定する方法を述べた。この方法により、素子特性によっては、対称な系においても非対称な不等振幅2重モード振動が生じうることを予想した。

次に、これからの予想を確かめるため、能動素子の特性が7次式、あるいは正弦関数で表される場合に、系に生じる多重モード振動を具体的に計算した。その結果、原点付近が負性

抵抗となる特性で、不等振幅の2重モード振動が生じることを確かめた。

このように、分布密度関数を用いて平均化操作を解釈することにより、非同期多重モード振動の発生機構の説明を試み、1個の能動素子の性質をかなり一般的な形で明らかにした。これにより、非同期多重モード振動の発生を複雑な計算に先立って予測することができた。この事は、非線形振動系の理解や設計に有力な手段となるであろう。しかし、正弦関数のように、そのテイラー展開に高べきの項を含む非線形特性においては、本章で無視した共振の影響が生じる可能性がある。共振が生じる場合の分布密度関数を用いた考察について、次章で述べる。

6. 整数比の固有周波数間の同期現象

6.1 ま え が き

3～5章では、固有周波数間に簡単な関係のない非共振の場合を考察してきた。本章では、固有周波数が整数比で、それらの間に共振が生じる場合に系に生じる同期現象について考える。

従来、このような同期現象は、多重モード発振との関連で関心がもたれてきた。能動素子が3次特性の発振器では、2つの固有周波数の比が1:3のとき、3倍の高調波成分を含んだ同期2重モード振動が安定に生じること⁽¹⁾、また、3個あるいは4個の固有周波数が特殊な関係をみたととき、非周期的な同期3重モードあるいは同期4重モード振動が生じること⁽⁵⁾⁽⁶⁾等が知られている。しかし、この他にどのような条件で同期振動が生じるか、また、他の非線形特性の場合にはどうなるか等については、ほとんど知られていない。

このように、多くの振動モードが同時に関与する同期現象の研究が多くない理由としては、現象そのものが複雑であることに加えて、従来の解析法がこのような現象の解明にあまり適していないことが挙げられる。例えば、平均化法において共振条件を満たすモード数が増加すると、共振効果を表現する項が急増し、平均化方程式は非常に複雑になる。また、数値積分等でシミュレーションを行なう際にも、系には多くの解が存在するから、すべての解を能率よく求めることができない。

本章では、5章で述べた平均化操作に対する考察をもとに、平均ポテンシャル法の基本である「損失分極小化原理」にたち帰って考える。すなわち、能動素子にとっては、損失分を極小とする最も望ましい電圧値が存在する。したがって、いくつかの整数比をなす周波数成分が印加された場合、能動素子はそれらを組み合わせて、損失分を極小とする電圧値付近になるべく長時間留るような特徴ある波形を作りあげ、平均的な損失分を極小化する。

本章では上述の考えに基づき、系に生じる同期波形を推定する。次に、2自由度系における同期現象を平均ポテンシャル関数を用いて解析し、予想された振動波形が生じることを確かめる。さらに自由度が大きい場合に系に生じる同期波形を記号列を用いて予想し、それらがすべて生じることをシミュレーションによって示す。共振回路の条件及び能動素子の条件が変化した場合にも、この考え方が適用できることを示す。

6.2 同期波形の予想

本節では、5章に引き続き、平均ポテンシャルを導く平均化操作を、分布密度関数を用い

て解釈する。これにより、固有周波数が簡単な整数比をなす多自由度発振器に生じる同期波形の特徴を明らかにする。

6.2.1 電圧分布に注目した平均化操作の解釈

図 6.1 の回路の平均ポテンシャルは、(5.4) 式と同様に、次式の平均化操作で求まる。

$$\begin{aligned}
 U(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) \\
 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{k=1}^M r_k \sin(\omega_k t + \theta_k) \right] dt
 \end{aligned}
 \quad (6.1)$$

各周波数比が簡単な整数比となる共振の場合には、

(6.1) 式は、位相角 θ_k を含む多くの項を含み、非共振の場合に比べて複雑になる。

ここで、5 章に述べたように、能動素子の印加電圧 V を確率変数のように考えて、その出現頻度、(分布密度関数) を $W(V; r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M)$ と書くと、(6.1) 式の積分は、 W を重みとした $G(V)$ の積分の形になる。

$$U(r_1, \dots, r_M, \theta_1, \dots, \theta_M) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(V) \cdot W(V; r, \theta) dV \quad (6.2)$$

ここで、 $G(V)$ は与えられた能動素子の特性のみから決まり、 $W(V)$ は生じる振動のみから決まる。 $W(V)$ は「損失分極小化原理」に従い、振動の初期状態から、(6.2) 式の値を小さくする方向へ変化していく。すなわち、 $G(V)$ の低いところでは V の存在頻度が高くなり、 $G(V)$ の高いところでは V の存在頻度が低くなるように $W(V)$ の形 (振動振幅、位相) が変化する。

6.2.2 同期による波形整形作用

では、(6.2) 式の U を最小とする $W(V)$ はどのような形であろうか。それは、 $G(V)$ の極小点付近に鋭いピークをもち、その他の点では 0 となるような形である。換言すれば、電圧波形が $G(V)$ の極小点付近に長時間留まり、その他の値をとるときには、すばやく動くような振動波形が、 U を最小とする。その理想的なものが方形波である。すなわち適当な固有周波数成分を用意してやれば、能動素子は「損失分極小化の原理」に従って、方形波に近い波形を作るものと予想される。

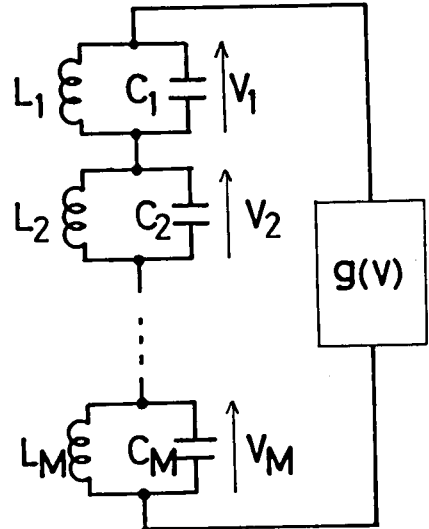


図 6.1 1 個の能動素子をもつ多自由度発振器

電圧ポテンシャルを極小とする電圧のことを、5.2節で定義したように停留電圧と呼ぶことにする。停留電圧は、能動素子の側から見て、最も『望ましい』電圧である。この言葉を用いると、「共振回路を適当に用意すれば、停留電圧を振幅とする方形波が生じる」と言うことができる。

具体的な特性と平均ポテンシャルを最小とする波形の関係は次のようになる。まず、次式で表される3次式の場合を考える。ただし、(3.25)式と同様に規格化する。

$$i = g(v) = \mu (-v + v^3/3) \quad (\mu \text{微小}) \quad (6.3)$$

この素子の電圧ポテンシャル

$$G(v) = \int i dv = \mu \left(-\frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{12} v^4 \right) \quad (6.4)$$

の極小点(停留電圧)は $v = \pm\sqrt{3}$ にある。したがって、この能動素子を用いた系では振幅 $\sqrt{3}$ の方形波が平均ポテンシャルを最小とする。

次に、5次式で表される特性を考える。ただし、(4.1)式と同様に規格化する。

$$i = g(v) = \mu (v - \beta v^3/3 + v^5/5) \quad (6.5)$$

この素子の電圧ポテンシャルは次となる。

$$G(v) = \int i dv = \mu \left\{ \frac{v^2}{2} - \frac{\beta}{12} v^4 + \frac{1}{30} v^6 \right\} \quad (6.6)$$

ただし、 $\beta = 3g_3/\sqrt{5g_1g_5}$

$G(v)$ の極小点(停留電圧)は次の3個である。

$$V_0 = 0, \quad \pm \sqrt{\frac{5}{6} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 7.2})} \quad (6.7)$$

したがって、上の3個の停留電圧値を切りかわる階段波が平均ポテンシャルを極小とする。

平均ポテンシャルを最小とする波形は、以上のような停留電圧を切りかわる方形波や階段波である。有限個の周波数成分が同期を生じる場合、これらの波形に近くなるような同期波形が生じるものと考えられる。以下、これを確かめる。

6.3 2自由度系の同期現象

本節では、図6.1の回路の最も簡単な場合である $M=2$ (2自由度系)に生じる同期現象を考察する。そして、同期波形が上述の予想を満たすことを述べる。

図6.1の系において、能動素子の印加電圧を、

$$v = r_1 \sin t + r_a \sin (at + \varphi) \quad (6.8)$$

とおく。 a が無理数であり、共振が生じない時には、(6.1)式で与えられる平均ポテンシャルは、位相項 φ を含まない $U_a(r_1, r_a)$ の形となる。 a が簡単な有理数である時には、平均ポテンシャルに位相 φ を含んだ付加項 $U_{add}(r_1, r_a, \varphi)$ が加わる。すなわち、共振が生じる場合の平均ポテンシャル U_s は、非共振時の平均ポテンシャル U_a から次のように書ける。

$$U_s(r_1, r_a, \varphi) = U_a(r_1, r_a) + U_{add}(r_1, r_a, \varphi) \quad (6.9)$$

表6.1に、能動素子の特性と、生じる共振付加項の関係を示す。

表6.1 2自由度系の平均ポテンシャルの共振付加項 U_{add}

能動素子特性	周 波 数 比		
	1 : 2	1 : 3	1 : 5
3 次 $-v + v^3/3$	—	$-r_1^3 r_3 \cos \varphi / 24$	—
5 次 $v - \beta v^3/3 + v^5/5$	$\frac{-r_1^4 r_2^2 \cos 2\varphi}{64}$	$\frac{-r_1^3 r_3 (3r_1^2 + 6r_3^2 - 4\beta)}{\times \cos \varphi / 96}$	$\frac{r_1^5 r_5 \cos \varphi}{160}$

6.3.1 能動素子特性が3次式で表される場合

能動素子の特性が(6.3)式の対称な3次式で表される場合、周波数比が1 : 3の場合に、共振付加項が生じる。

$$U(r_1, r_3, \varphi) = -\frac{1}{4} (r_1^2 + r_3^2) + \frac{1}{96} (3r_1^4 + 12r_1^2 r_3^2 + 3r_3^4 - 4r_1^3 r_3 \cos \varphi) \quad (6.10)$$

ただし、解は次のように仮定した。

$$v = r_1 \sin t + r_3 \sin (3t + \varphi) \quad (6.11)$$

(6.10)式より、 $\text{grad } U = 0$ となる点、すなわち(6.10)式より導かれる平均化方程式の平衡点は、 $\varphi = 0, \pi$ を満たす。この条件下で、 $\partial U / \partial r_1 = 0$ 、 $\partial U / \partial r_3 = 0$ の2式は r_1 / r_3 に関する4次方程式に整理でき、この平衡点をすべて求める事ができる。これを表6.2に示す。

これらの平衡点に対する波形を解の仮定(6.11)式より合成して図6.2に示す。

Aの波形は、1 : 3の2つの周波数による方形波近似波形である。また、Sは $\omega = 3$ の単一モード振動である。

これらの波形は、 $0 \leq t \leq 2\pi$ の区間に3個ずつ山と谷をもって、いる。これらが停留電圧 $+\sqrt{3}$ 、 $-\sqrt{3}$ のいずれに近いかによって、記号 $+$ 、 $-$ をあてはめる。こうして、波形を記号列で表現できる。表6.2の記号列の欄は、こうして得た、半周期分の波形を表現する記号列である。

不安定な振動に対する波形B、Cは、電圧ポテンシャルの極大点($v=0$)と、極小点($v=\pm\sqrt{3}$)を切りかわる波形であることが、図6.2よりわかる。

電圧ポテンシャル $G(V)$ の極大を与える v を不安定停留電圧と呼び、記号 \oplus で表すことにする。こうして、B、Cの振動にも、記号列を対応させることができる。すなわち、平均化方程式の平衡点に対応する波形は、不安定停留電圧を含む停留電圧を順次切りかわる波形である。すなわち、この系の平衡点に対応する波形は、停留電圧および不安定停留電圧に対応する記号 $+$ 、 $-$ 、 \oplus の組み合わせの記号列で表現できる。これらのうち、安定な停留電圧（電圧ポテンシャルの極小を与える電圧）のみを切りかわる波形の振動は、安定である。

6.3.2 能動素子特性が5次式で表される場合

能動素子の特性が(6.6)式で表される対称な5次特性の場合、平均ポテンシャルの共振付加項は、周波数比1:3, 1:2, 1:5の場合に生じる。

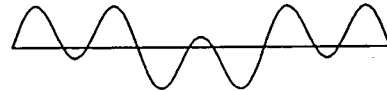
まず、1:3同期振動を考える。解を(6.11)式で仮定し、表6.1より平均ポテンシャル

表6.2 1:3同期の平衡点(3次特性)

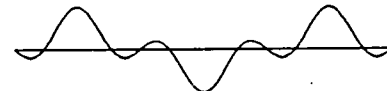
	r_1	r_3	φ	安定性	記号
A	2.136	0.593	0°	安定	+++
B	0.991	1.501	0°	不安定	$+\oplus+$
C	1.145	0.908	180°	"	$\oplus+\oplus$
S	0.000	2.000	0°	安定	+--



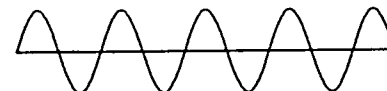
A $r_1=2.136$ $r_3=0.593$ $\varphi=0.0$
(+ + + - - -)



(B) $r_1=0.991$ $r_3=1.501$ $\varphi=0.0$
(+ \oplus + - \oplus -)



(C) $r_1=1.145$ $r_3=0.908$ $\varphi=180.0$
(\oplus + \oplus \oplus - \oplus)



S $r_1=0.0$ $r_3=2.000$ $\varphi=0.0$
(+ - + - + -)

S3 1:3

図6.2 1:3同期波形(3次特性)

A, S: 安定, \oplus , \ominus : 不安定

を求める。

$$\begin{aligned}
 U(r_1, r_3, \varphi) = & \frac{1}{4} (r_1^2 + r_3^2) \\
 & - \frac{\beta}{96} (3r_1^4 + 12r_1^2 r_3^2 + 3r_3^4 - 4r_1^3 r_3 \cos \varphi) \\
 & + \frac{1}{96} (r_1^6 + 9r_1^4 r_3^2 + 9r_1^2 r_3^4 + r_3^6 - 3(r_1^5 r_3 + 2r_1^3 r_3^3) \cos \varphi) \quad (6.12)
 \end{aligned}$$

(6.12) 式の $\text{grad } U = 0$ より r_3 / r_1 に関する10次方程式を得る。これを解いて、(6.12) 式の平衡点をすべて求めることができる。

$\beta = 3.2$ に対して求めた平衡点と、その波形を図 6.3 に示す。A, B, C, S は安定な振動であり、(6.7) 式で示す 3 個の停留電圧 (記号 +, -, 0 で示す) を切りかわる波形である。一方、特性が (6.6) 式で表される能動素子は、

$$v = \pm \sqrt{\frac{5}{6} (\beta - \sqrt{\beta^2 - 7.2})} \quad (6.13)$$

で表される不安定停留電圧をもつ。これを \oplus , \ominus の記号で示す。図 6.3 中の $\textcircled{A} \sim \textcircled{D}$, \textcircled{S} , $\textcircled{D} \sim \textcircled{D}$ の不安定な振動の波形は、+, -, 0 の他に、 \oplus , \ominus を切りかわる記号列に対応している。

安定な同期振動 A, B, C, S のパラメータ β に対する安定範囲を表 6.3 に示す。

表 6.3 1 : 3 同期振動の安定範囲 (5 次特性)

振動	記 号 列	安 定 範 囲
A	+++---	$8.288 < \beta^2$
B	+0+-0-	$8.114 < \beta^2 < 12.573$
C	0+00-0	$8.274 < \beta^2 < 11.674$
S	+--+--+	$8.000 < \beta^2$

パラメータ β は (6.6) 式の特性の負性抵抗部分の大きさを示すパラメーターであるから、これがある程度以上の大きさをもたない限り発振は生じない (β の下限)。一方、 β が

大となると、 $G(v)$ の外側の極小点 (+, -) が深くなり、影響力の小さくなる内側の極小点 (0) を利用する振動 (B, C) は不安定になる。

次に、1 : 2 同期振動について考える。解を次のようにおく。

$$v = r_1 \sin t + r_2 \cos (2t + \varphi) \quad (6.14)$$

平均ポテンシャルは、表 6.1 より次の形になる。

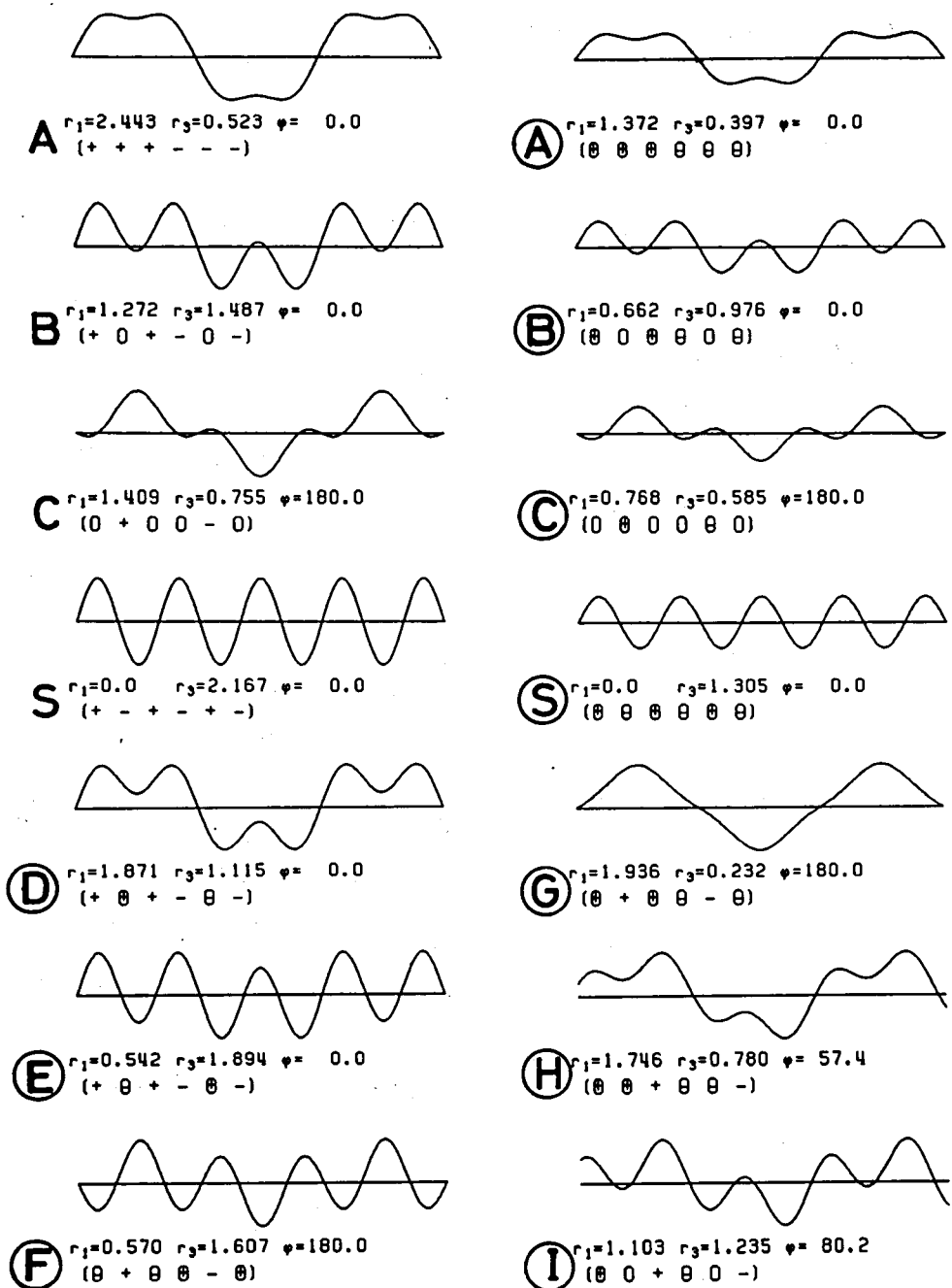


図 6.3 1:3 同期波形 (5 次特性, $\beta = 3.2$)

A, B, C, S: 安定, その他: 不安定

$$U(r_1, r_2, \varphi) = \frac{1}{4} (r_1^2 + r_2^2) - \frac{\beta}{32} (r_1^4 + 4r_1^2 r_2^2 + r_2^4) \\ + \frac{1}{96} (r_1^6 + 9r_1^4 r_2^2 + 9r_1^2 r_2^4 + r_2^6) - \frac{1}{64} r_1^4 r_2^2 \cos 2\varphi \quad (6.15)$$

(6.15) 式の極小点は $\varphi = 0$ を満たす。生じる振動と、その安定範囲を示す。

$\omega = 1$ の単一モード振動

$$r_1 = \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \quad r_2 = 0 \\ \text{安定範囲} \quad 9 < \beta^2 \quad (6.16)$$

$\omega = 2$ の単一モード振動

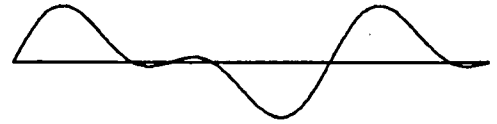
$$r_1 = 0 \quad r_2 = \sqrt{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8}} \\ \text{安定範囲} \quad 8 < \beta^2 \quad (6.17)$$

同期 2 重モード振動

$$\text{安定範囲} \quad 8.167 < \beta^2 < 11.555 \quad (6.18)$$

$\beta = 3.2$ に対する 2 重モード振動の同期波形を図

6.4 に示す。この波形は、記号表現 $+ - 0 0$ をもつ。



次に 1 : 5 同期振動について考える。解を

$$v = r_1 \sin t + r_5 \sin (5t + \varphi) \quad r_1 = 1.455 \quad r_2 = 1.035 \quad \varphi = 0.0 \\ (+ - 0 0) \quad (6.19)$$

とおき、平均ポテンシャルを求める。

図 6.4 1 : 2 同期振動波形
(5 次特性, $\beta = 3.2$)

$$U(r_1, r_5, \varphi) = \frac{1}{4} (r_1^2 + r_5^2) - \frac{\beta}{32} (r_1^4 + 4r_1^2 r_5^2 + r_5^4) \\ + \frac{1}{96} (r_1^6 + 9r_1^4 r_5^2 + 9r_1^2 r_5^4 + r_5^6) + \frac{1}{160} r_1^5 r_5 \cos \varphi \quad (6.20)$$

この系に生じる振動は次の 3 通りである。

$\omega = 5$ の単一モード振動

$$\text{安定範囲} \quad 8 < \beta^2$$

同期 2 重モード振動 (A)

$$\text{安定範囲} \quad 8.395 < \beta^2$$

同期 2 重モード振動 (B)

$$\text{安定範囲} \quad 8.578 < \beta^2 < 9.626$$

図 6.5 に、 $\beta = 3$ に対する 3 つの振動の波形を示す。2 重モード (A) に対する波形は記号

列表現「0++0」，2重モード（B）に対する波形は記号列表現「0+0+0」をもつ。

このように，2自由度系における同期振動の波形は，停留電圧+，-あるいは+，-，0を切りかわる方形波，あるいは階段波の近似波形と考えることができた。系の自由度 M が大となり，利用できる周波数成分が多くなれば，この近似の程度は良くなると考えられる。

6.4 1 : 3 : 5 : … : (2M-1) 同期振動

本節では，図6.1の回路において， $M > 2$ の場合を考える。 M が大きくなれば，同期振動の波形は，方形波や階段波により近づくと考えられる。この中で最も簡単な波形である方形波が生じやすいように，系の固有周波数を選ぶ。

振幅 V_0 の方形波は，次のようにフーリエ級数に展開される。

$$V(t) = \frac{4}{\pi} V_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)t \quad (6.21)$$

そこで，本節では，方形波が生じやすいように，固有周波数の比が1 : 3 : 5 : … : (2M-1)である M 自由度系を考える。

図6.1の系において，コイル，コンデンサーの値を次のように設定する。

$$L_k = 1 / (2k-1)^2$$

$$C_k = 1$$

$$(k = 1, \dots, M)$$

$$(6.22)$$

この回路は $M \rightarrow \infty$ のとき，図6.6のように，一端を短絡した伝送線路の他端に能動素子をつけた回路とみなせる（付録E）。

以下，この系における典型的な同期波形である方形波近似波形の，自由度 M に対する変化を調べる。次に，方形波以外にも多くの種類の同期振動が生じることを述べ，

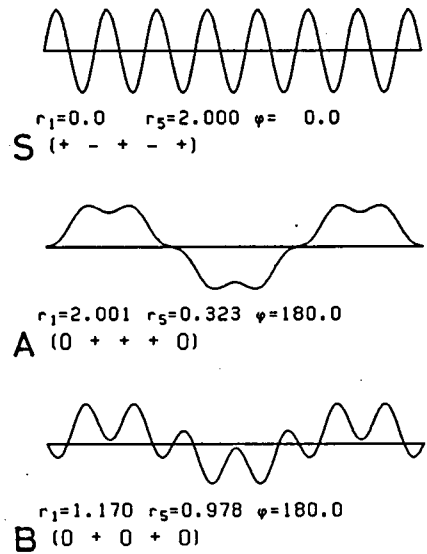


図6.5 1 : 5 同期波形
(5次特性， $\beta = 3$)

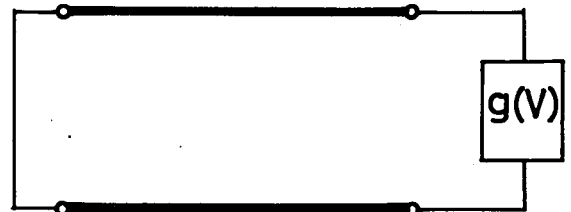


図6.6 一端に能動素子をつけた伝送線路

それらを系統的に発生させるシミュレーション法を述べる。

6.4.1 方形波近似波形

停留電圧を切りかわってゆく最も簡単な波形は方形波である。これを近似した波形の、自由度 M に対する変化を示す。

表 6.4 方形波近似波の各調波成分の振幅

能動素子特性が3次式で表される場合、方形波近似波形の構成モードの振幅を、平均ポテンシャルの極小点より求め、表 6.4 に示す。表の最下段は、振幅 $\sqrt{3}$ の方形波のフーリエ展開を示す。 M の増加とともに、各モードの振幅は増えて、方形波に近づいていくことがわかる。

M	r_1	r_3	r_5	r_7	r_9	r_{11}
1	2.0000					
2	2.1362	0.5931				
3	2.1705	0.6618	0.3380			
4	2.1842	0.6899	0.3768	0.2347		
5	2.1911	0.7042	0.3969	0.2595	0.1794	
6	2.1950	0.7125	0.4086	0.2741	0.1965	0.1450
∞	2.2053	0.7351	0.4411	0.3150	0.2450	0.2005

また、シミュレーション ($\mu = 0.1$) によって得た波形を $M=1 \sim 6$ について図 6.7 に示す。

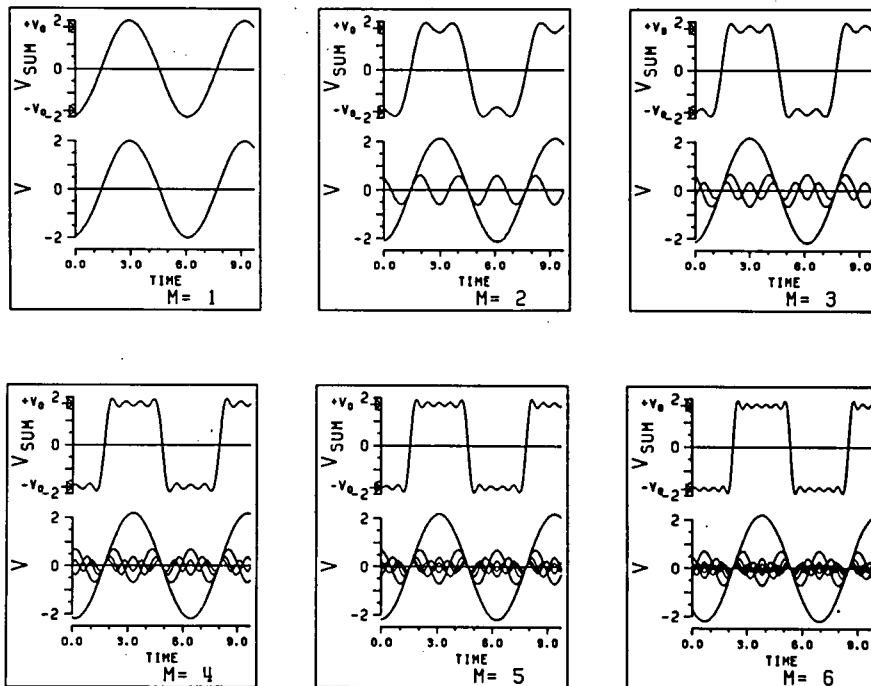


図 6.7 方形波近似波形の自由度 M に対する変化

各図上段は能動素子に加わる電圧波形で、自由度 M の増加とともに方形波に近づく。下段は各共振回路の電圧を示す。

よく知られた1:3同期波形(図6.7(2))は、正弦波(同図(1))が方形波に近づく第一歩であると理解できる。

6.4.2 有限フーリエ級数の極値の個数

6.3節で示したように、同期波形は1種類に限らない。これらの同期波形は停留電圧を切りかわる波形であるが、切りかわりの回数は、次の命題により制限される。

命題 $P(t)$ を、周波数 n までを含む有限フーリエ級数で表される周期 2π の周期関数とする。

$$P(t) = \sum_{m=1}^n r_m \sin(mt + \theta_m) \quad (6.23)$$

$P(t)$ が恒等的に0でなければ、その一周期($0 \leq t < 2\pi$)内の零点の個数は $2n$ 個以下である。また、一周期の極大点、極小点の個数は各々 n 個以下である。

(略証) 命題の後半は、命題の前半を $\dot{P}(t)$ に適用して得られる。 $P(t)$ の隣り合った零点の間で $P(t)$ は少なくとも1個の極値をとる。すなわち、 $\dot{P}(t)$ の一周期内の零点の個数は、 $P(t)$ の零点の個数より少なくない。 $P(t)$ の微分は高調波を強調することであるから、十分大きな k に対しては、 $P(t)$ の k 階導関数 $P^{(k)}(t)$ の零点の個数は、その最高周波数成分 $r_n \sin(nt - \frac{k}{2}\pi + \theta_n) \cdot n^k$ の零点の個数 $2n$ と一致する。したがって、 $P(t)$ の零点の個数は $2n$ を超えない。 (証了)

図6.1の系では、解は次の形における。

$$V = \sum_{k=1}^M r_{2k-1} \sin[(2k-1)t + \theta_{2k-1}] \quad (6.24)$$

よって、 $0 \leq t < 2\pi$ における V の極値の個数は $2(2M-1)$ 個である。

6.4.3 記号列による波形の表現

図6.1の系に生じる同期振動波形は、停留電圧付近で小さな山と谷をもつ。6.3節で述べたように、停留電圧を記号 $+$ 、 $-$ 又は、 $+$ 、 $-$ 、 0 で代表させる。こうして、同期波形の一周期分に、 $+$ 、 $-$ 、 0 の記号をあてはめて、記号列を得る。この長さは、6.4.2節の命題より $2n$ を超えない。

記号列中、 $+$ の連続は同期波形の山から始まり、谷、山をはさんで山で終る部分に対応する。したがって、 $+$ は奇数個連続する。記号 $-$ についても同様である。

また、奇数調波成分のみからなる波形は、半周期ずらすと上下が逆転する。そこで、記号

の前半で、+と-をおきかえると後半の部分になる。

以上をまとめると、奇数次周波数の同期波形に対応する記号列は、次の規則に従う。

(G0) rotate shiftによって重なる記号列を同一視する。

(G1) 能動素子の特性が3次式の場合、+、-の2つの記号、5次式の場合、+、-、0の3つの記号の組み合わせである。

(G2) 記号列長は偶数で、これを 2ℓ とすると、 ℓ は最高周波数を超えない。すなわち、

$$\ell \leq 2M-1 \quad (6.25)$$

(G3) +または-が連続するときは奇数個連続する。+と-にはさまれた0は偶数個連続し、+と+、または-と-にはさまれた0は奇数個連続する。

(G4) 記号列の前半(長さ ℓ の部分列)において、+と-をおきかえると後半部分と一致する。

図6.1の系の安定な同期波形は、(G1)~(G4)の規則をみたすと考えられる。しかし、任意の ℓ ($\ell=1, 2, \dots, 2M-1$)に対して、(G1)~(G4)を満たす長さ 2ℓ の記号列パターンに対する波形が安定に生じるとは限らない。例えば、長さ2の記号列“+-”に対する振動($\omega=1$ の単一モード振動)は、 $M \geq 2$ の系では不安定である。

そこで、図6.1の系に実際生じる振動を調べるため、シミュレーションを行なう。

6.4.4 シミュレーション

まず、(G0)~(G4)を満たす記号列を全部発生させる。3次特性の能動素子に対する+、-からなる記号列を表6.5に、5次特性素子に対する+、-、0の記号列を表6.6に示す。

次に各々の記号列に対して共振回路の初期値を決める。まず、区間 $[0, 2\pi]$ を 2ℓ 等分割し、その各区間内で+、-、0に対応する停留電圧をとる階段波(モデル階段波と呼ぶ)を作る。これをフーリエ展開して、その $2M-1$ 調波成分までを各共振回路に与える。

能動素子が3次特性である場合、 $M=2 \sim 6$ について、特性が5次特性である場合、 $M=2 \sim 4$ について、図6.1の回路方程式を直接シミュレーションした。

その結果、次の事が確かめられた。

- 1) 長さ $2\ell = 2(2M-1)$ の記号列で、(G1)~(G4)を満たすものに対して、安定な同期振動が生じた。
- 2) 長さ $2\ell < 2(2M-1)$ の記号列に対しては、それが単一モード振動であり、かつ、その高調波が系の固有周波数に含まれていない場合に限り、安定となった。
- 3) ランダムに選んだ初期値からのシミュレーションを多数回試みたが、上記1)、2)以外の同期波形は生じなかった。

表 6.5 同期波形の記号列表現(半周期分)
(3 次特性能動素子,
周波数比 $1:3:5 \cdots 2M-1$)

$M=2$ ($\ell=3$)

1 + + +
2 + - +

$M=3$ ($\ell=5$)

1 + + + + +
2 + + + - +
3 + - + - +

$M=4$ ($\ell=7$)

1 + + + + + + +
2 + + + + + - +
3 + + + - + + +
4 + + + - + - +
5 + - + - + - +

$M=5$ ($\ell=9$)

1 + + + + + + + + +
2 + + + + + + + - +
3 + + + + + - + - +
4 + + + + + - - - +
5 + + + + + - + - +
6 + + + - - - + + +
7 + + + - + + + - +
8 + + + - + - + + +
9 + + + - + - + - +
10 + - + - + - + - +

$M=6$ ($\ell=11$)

19 個

表 6.6 同期波形の記号列表現(半周期)
(5 次硬発振特性能動素子,
周波数比 $1:3:5:\cdots:2M-1$)

$M=2$ ($\ell=3$)

1 + + +
2 + - +
3 + 0 +
4 + 0 0
5 0 0 0

$M=3$ ($\ell=5$)

1 + + + + +
2 + + + - +
3 + - + - +
4 + + + 0 +
5 + + + - 0
6 + - + - 0
7 + + + 0 0
8 + 0 + 0 +
9 + - + 0 0
10 + 0 + 0 0
11 + 0 0 0 +
12 + 0 0 0 0
13 0 0 0 0 0

$M=4$ ($\ell=7$)

43 個

$M=5$ ($\ell=9$)

166 個

停留電圧を切りかわるモデル階段波形を，与えられた周波数成分で最良近似すれば，最大個数の極大と極小をとる波形，すなわち， $2\ell = 2(2M-1)$ を満たす記号列に対応する波形になる。したがって，1)の記号列に対応する波形がすべて安定になると理解できる。

シミュレーションの結果得られた波形を，3次特性素子， $M=4(1:3:5:7)$ の場合について図6.8に示す。各図は3つの波形よりなっている。上段の波形は与えた記号列に従うモデル階段波と，そのフーリエ展開を M 項で打ち切ったものである。これを初期値としてシミュレーションを行ない，各共振器の電圧(中段)，能動素子の印加電圧(下段)を得た。

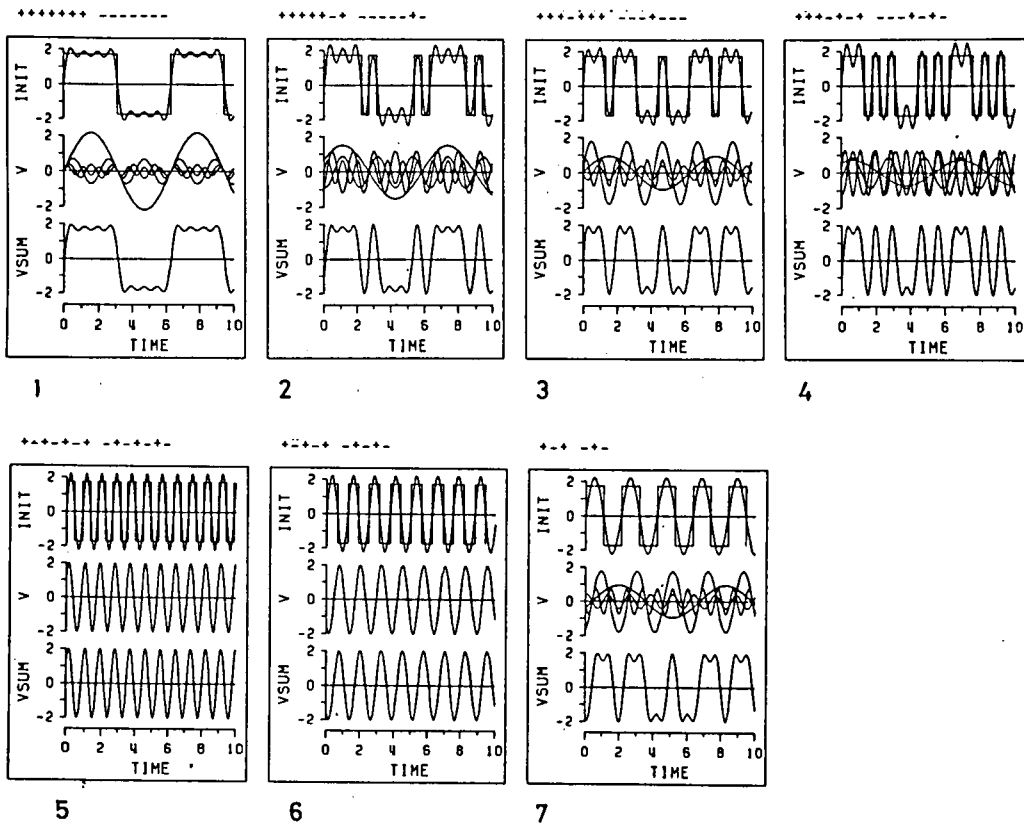


図6.8 同期波形 (3次特性，周波数比 1:3:5:7)

フーリエ展開で与えた波形が整形され，頭がきれいに整形された同期波形となることがわかる。このように，長さ $2\ell = 2(2M-1)$ の記号列で(G1)~(G4)を満たすものに対し，安定な同期振動が生じ，かつ，初期値によって出し分けができることがわかった。これらの振動はすべて電圧ポテンシャルの極小点(停留電圧)付近をゆっくりと動くような波形になっており，6.2節での予想が裏付けられた。

6.5 偶数次の固有周波数を含む場合

本節では、図 6.1 の回路において、固有周波数が偶数次を含む簡単な整数比 ($1 : 2 : 3 \dots : M$) で表される場合について考える。

周波数比が奇数比の場合、回路に生じる同期振動は、前節の (G0)~(G4) を満たす記号列で表現できた。このうち、記号列の前後の対称性を規制する (G4) の規則は、固有周波数に偶数次を含む場合、次のように緩和される。

(G4)' + と - の個数は等しい。

さて、周波数に偶数次を含む場合、波形を半周期ずらしても上下の逆転を生じないので、上下非対称な波形が生じる可能性がある。このような波形に対する記号列を得るため、規則 (G4)' を外して記号列を拡張する。

能動素子特性が 3 次特性であり $M=3$ 、周波数比 $1:2:3$ の場合、(G0)~(G4)' をみたす記号列を表 6.7 に示す。前節と同様の方法でシミュレーションを行なった結果、a を除く各記号列に対する同期振動が生じた (図 6.9)。しかし、規則 (G4)' をみたさない拡張された記号列に対する振動は、 $M=3$ では見出せなかった。

表 6.7 (G0)~(G4)' を満たす記号列
3 次特性, $M=3$, 周波数比 $1:2:3$

a	+ -
b	+ - + -
c	+ + + - - -
d	+ - + - + -

次に、能動素子特性が 5 次特性である場合、 $M=3$ 、固有周波数比 $1:2:3$ の場合を考える。

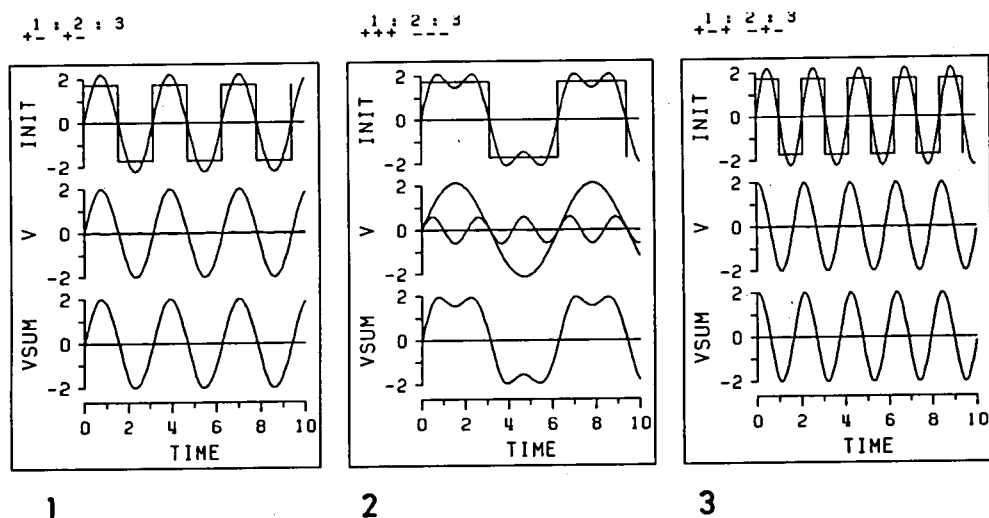


図 6.9 同期波形 (3 次特性, 周波数比 $1:2:3$)

(G0)~(G4)' をみたす

表 6.8 (G0)~(G4)' を満たす記号列

記号列を表 6.8 に, シミ

(5 次特性, $M=3$, 周波数比 1:2:3)

ュレーション結果を図 6.

10に示す。記号列 '+ -'

に対する $\omega=1$ の単一モ

ード振動以外は安定に生

じることがわかる。また,

規則 (G4)' を満たさない

記号列 '+ + + - 0 -'

に対する上下非対称な波

形も生じた (図 6.10 (9))。

		Fig. No.
a	+ -	—
b	+ - + -	6.10 (1)
c	+ - 0 0	6.10 (8)
d	+ + + - - -	6.10 (2)
e	+ - + - + -	6.10 (3)
f	+ - + - 0 0	6.10 (4)
g	+ - 0 - + 0	6.10 (5)
h	+ - 0 0 0 0	6.10 (6)
i	+ 0 0 - 0 0	6.10 (7)

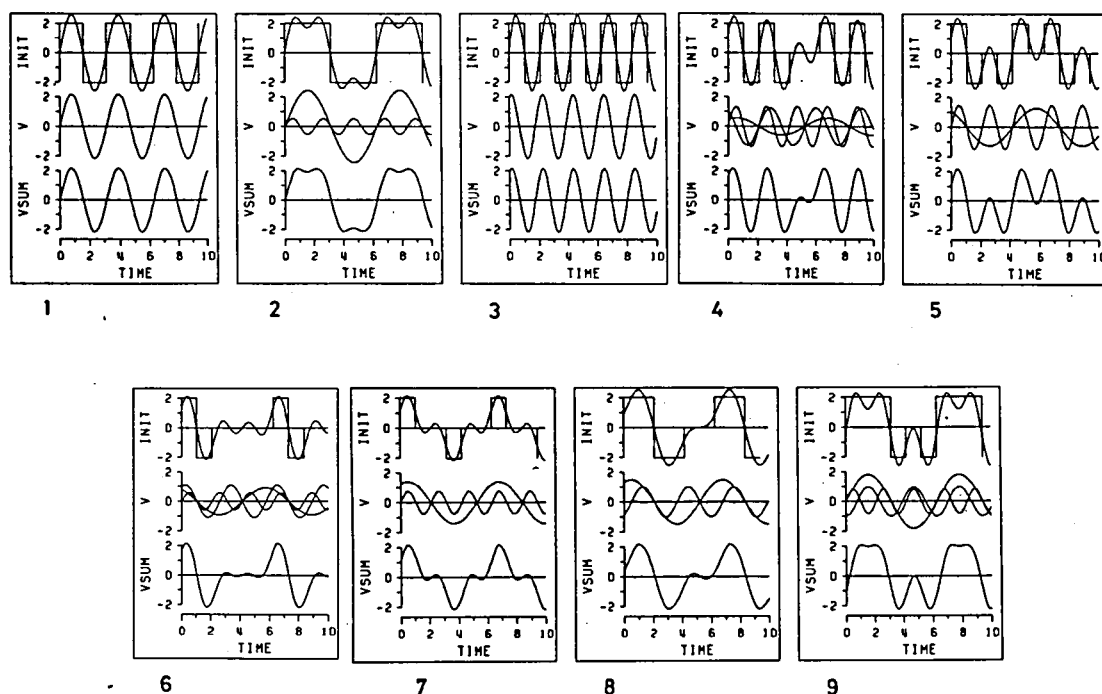


図 6.10 同期波形 (5 次特性, 周波数比 1:2:3)

以上のシュミレーション結果をまとめてみると次のようになる。

- 1) 長さ $2l = 2M$ の記号列で, (G1)~(G4)' を満たすものに対する同期振動が安定に生じた。

2) 長さ $2l < 2M$ の記号列に対しては、それが単一モード振動であり、かつ、その高調波が系の固有周波数に含まれていない場合に限り、安定となった。

3) 長さ $2l = 2M$ の記号列で、(G1)~(G3)を満たすが、(G4)'を満たさない上下非対称なものの中の一部に対応する同期振動が安定に生じた。

以上のように、固有周波数に偶数次を加えると、奇数次のみの場合に生じた振動以外の同期振動も数多く生じた。そして、いずれの波形も停留電圧付近に停留する波形であり、「損失分極小化原理」からよく説明できる。

6.6 能動素子特性が非対称な場合

図 6.11(a)に示すような直流バイアスを含んだ3次特性の能動素子を考える。これは等価的に、同図(b)のように、3次特性がシフトしたものと考えることができる。この場合の電圧ポテンシャルの極小点、すなわち停留電圧も同様にシフトする。このような能動素子をもつ多自由度発振器では、十側と一側とで絶対値の異なる停留電圧間を切りかわるような階段状波形が安定に生じると予想される。この波形は上下非対称であるから、固有周波数には偶数次成分を含まなければならない。そこで、周波数比 1 : 2 : 3 の 3 自由度発振器についてシミュレーションを行なった。

前節で述べたように、バイアスが 0 の場合には、上下非対称波は生じない。しかし、バイアス E を入れると、図 6.12(a)~(c)に示すような波形が安定に生じる。これらは、シフトして非対称になった停留電圧を切りかわる波形である。この現象も、「損失分極小化原理」に基づく波形整形作用から、よく説明できる。

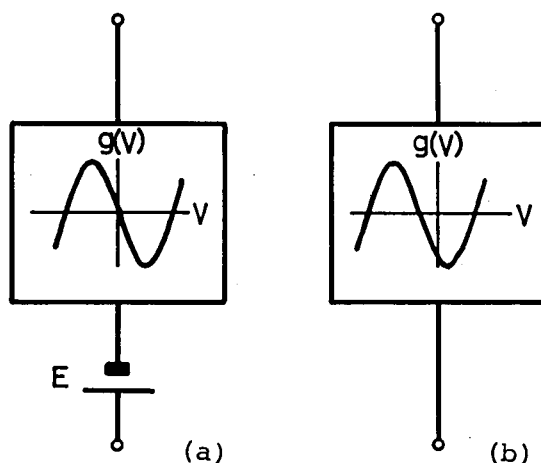


図 6.11 直流バイアスを含んだ能動素子

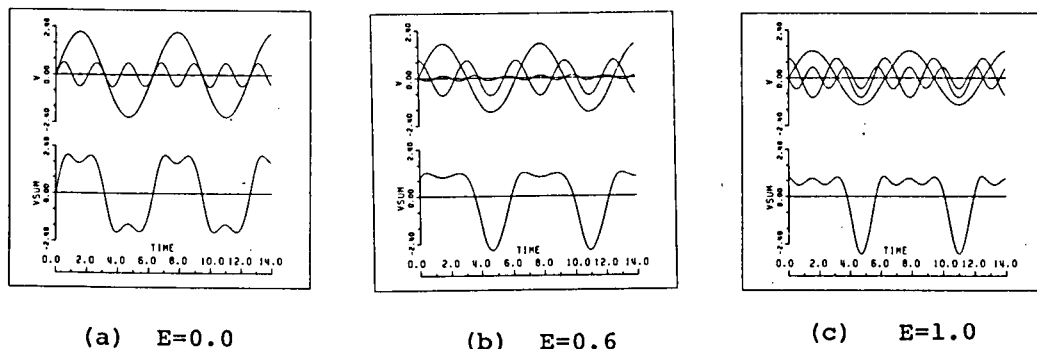


図 6.12 バイアスによる同期波形の変化 (周波数比 1:2:3)

6.7 む す び

本章では、固有周波数比が簡単な整数比で表される多自由度発振器に生じる同期振動について検討した。

まず、「損失分極小化原理」と、分布密度関数を用いた平均化操作の解釈から、能動素子の損失分を最小とする波形は、停留電圧を切りかわる方形波、あるいは階段波であることを示した。したがって、適当な周波数の共振回路が用意された系では、これらの同期により階段波の近似波形が生じると予想される。

系が2自由度の場合について、平均ポテンシャル関数を用いた解析により、これらの予想が正しいことを確かめた。さらに自由度が大きい場合には、予想される振動波形を記号列で表現し、これを用いたシミュレーションにより、予想波形を効率よく得ることができた。

本章で用いた方法は、従来の方法に比べると大づかみではあるが、従来見られなかった新しい視点に立つものと考えられる。すなわち、従来の方法が振動系の立場に立ち、振動を振幅、位相等の数値量でしかとらえられなかったのに対し、本章の方法では、時間領域における波形の意味を積極的にとらえた。そして、能動素子の立場から、損失分が最小となる理想状態の波形を明らかにし、用意された周波数成分がこの状態へ近づくように同期を生じるという解釈を行なった。こうして、現象の全体像が理解できると、安定となる波形が推定され、それらを確かめるシミュレーションを効率よく行なうことができた。

以上のように、系に生じる現象を大づかみに、定性的に理解するためには、波形に基づく考察は有用である。

7. 急峻な飽和特性の能動素子を用いた発振器

7.1 ま え が き

本章では、能動素子の特性が急峻に飽和するような発振器に生じる振動について調べる。3章では、能動素子の特性が3次式で表される場合に、非同期多重モード振動が生じる条件を調べた。その結果、1個の能動素子の性質を知ることにより、多数の能動素子をもつ発振器（典型例としてはしご状発振器）に生じる振動を説明することができた。

さて、3章では、能動素子の特性を3次式で表した。この表現は、小入力で負性抵抗、大入力で飽和するような抵抗特性の表現として最も簡単であり、一般に広く用いられている。しかし、このような近似に基づく解析結果が現実の素子（Ebers-Mollのモデル等のように、3次式より急に飽和する場合が多い）を用いた系の現象をどの程度正しく表しているかは疑問である。

そこで本章では、能動素子の特性が急に飽和する場合に、系に生じる振動がどのように変化するかを調べる。

まず、7.2節では、急な飽和特性をもつ軟発振の能動素子を、高次多項式あるいはリミター特性で表すことを述べる。特に、リミター特性の能動素子を用いた発振器の解析は、リミターに起因する制約条件下で、平均ポテンシャル関数の極小点を求める数値計画問題に定式化されることを示す。

7.3節では、1個の能動素子を用いた多自由度発振器を考え、そこに生じる非同期多重モード振動を解析する。その結果、能動素子が1個の系では、飽和の急峻さは、生じる現象に本質的な影響を与えないことがわかる。

続いて、7.4節では、2個の能動素子を用いた2自由度発振器、7.5節では、はしご状発振器を各々解析する。その結果、多数の能動素子を用いた発振器では飽和特性の急峻さの程度により、現象が大きく変化することがあることを示す。

7.2 急峻な飽和特性の能動素子を用いた発振器

本節以下では、急峻な飽和をもつ軟発振特性の能動素子を用いた発振器に生じる非同期振動について調べる。本節では、急峻な飽和特性をもつ能動素子を高次多項式、及びリミター特性で表し、それらの平均ポテンシャルの形を述べる。特に、リミター特性の場合の解析法として新しい方法を述べる。

7.2.1 高次多項式特性の能動素子と平均ポテンシャル

能動素子特性を次式のような軟発振の高次式特性で表す。

$$i = -v + v^{2n-1} / (2n-1) \quad (7.1)$$

図 7.1 に (7.1) 式で表される特性曲線のいくつかを示す。この素子の損失分（散逸関数）を表す電圧ポテンシャルは次式となる。

$$G(v) = \int i dv = -v^2/2 + v^{2n}/2n \cdot (2n-1) \quad (7.2)$$

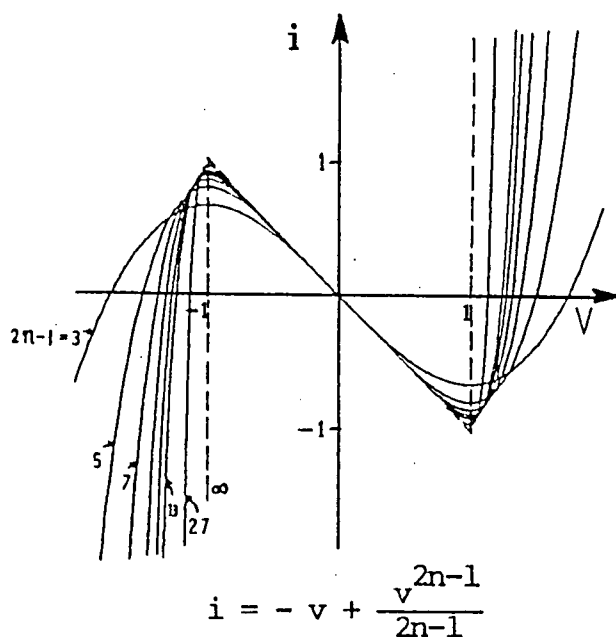


図 7.1 急峻な飽和をもつ能動素子特性

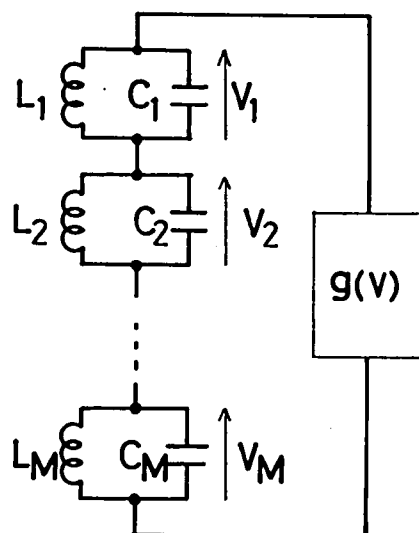


図 7.2 1 個の能動素子をもつ多自由度発振器

能動素子 1 個の性質を調べるため、多自由度発振器の最も簡単な例である図 7.2 の系の平均ポテンシャルを求める。能動素子のコンダクタンスが小さいとき、素子への印加電圧を次のように仮定する。

$$v = \sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \quad (7.3)$$

ここで共振器の固有周波数 ω_m が簡単な関係にない非共振の場合を考える。

平均ポテンシャルは次のように求まる（付録 C）。

$$\begin{aligned}
U(R_1, \dots, R_M) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \right] dt \\
&= -\frac{1}{4} (R_1 + \dots + R_M) \\
&\quad + A_n \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_M = n} \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_M!} \right)^2 R_1^{i_1} \cdot R_2^{i_2} \cdot \dots \cdot R_M^{i_M}
\end{aligned} \tag{7.4}$$

ただし,

$$R_m = r_m^2, \quad A_n = \frac{2^n C_n}{2n \cdot (2n-1) \cdot 4^n} \tag{7.5}$$

(7.4) 式の Σ は, $i_1 + \dots + i_M = n$ を満たす非負整数 $i_1, \dots, i_M (\geq 0)$ のすべての組み合わせに対しての総和を表す。

次に, 3.6 節と同様の, 図 7.3 に示すはしご状発振器の平均ポテンシャルを求める。能動素子を開放除去した無損失生成系において, v_k は次の形で与えられる。

$$\begin{aligned}
v_k &= \sum_{m=1}^M P_{mk} r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \\
&\quad (k = 1, \dots, M)
\end{aligned} \tag{7.6}$$

ただし, モードパターン P_{mk} およびモード周波数 ω_m は, 3.6.1 節 (3.51)~(3.53) 式で与えられる。

(7.6) 式を (7.2) 式に代入して平均化することにより, 系の平均ポテンシャルを得る。

$$\begin{aligned}
U &= \sum_{k=1}^M \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G(v_k) dt \\
&= -\frac{1}{4} \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M P_{mk}^2 R_m \\
&\quad + A_n \sum_{i_M, n} \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_M!} \right)^2 \cdot \sum_{k=1}^M P_{1k}^{2i_1} \dots P_{Mk}^{2i_M} \cdot R_1^{i_1} \cdot \dots \cdot R_M^{i_M}
\end{aligned} \tag{7.7}$$

最後の項の $\sum_{i_M, n}$ は, (7.4) 式で述べた和を表す。

7.2.2 リミター特性の能動素子と平均ポテンシャル

多項式特性 (7.1) 式において, n が大となった極限を表すリミター特性を導入する。 n が十分大となれば飽和項は v がある閾値以下では効かず, v が閾値を越えると急に効く。その様子をモデル化して次の特性を考える。

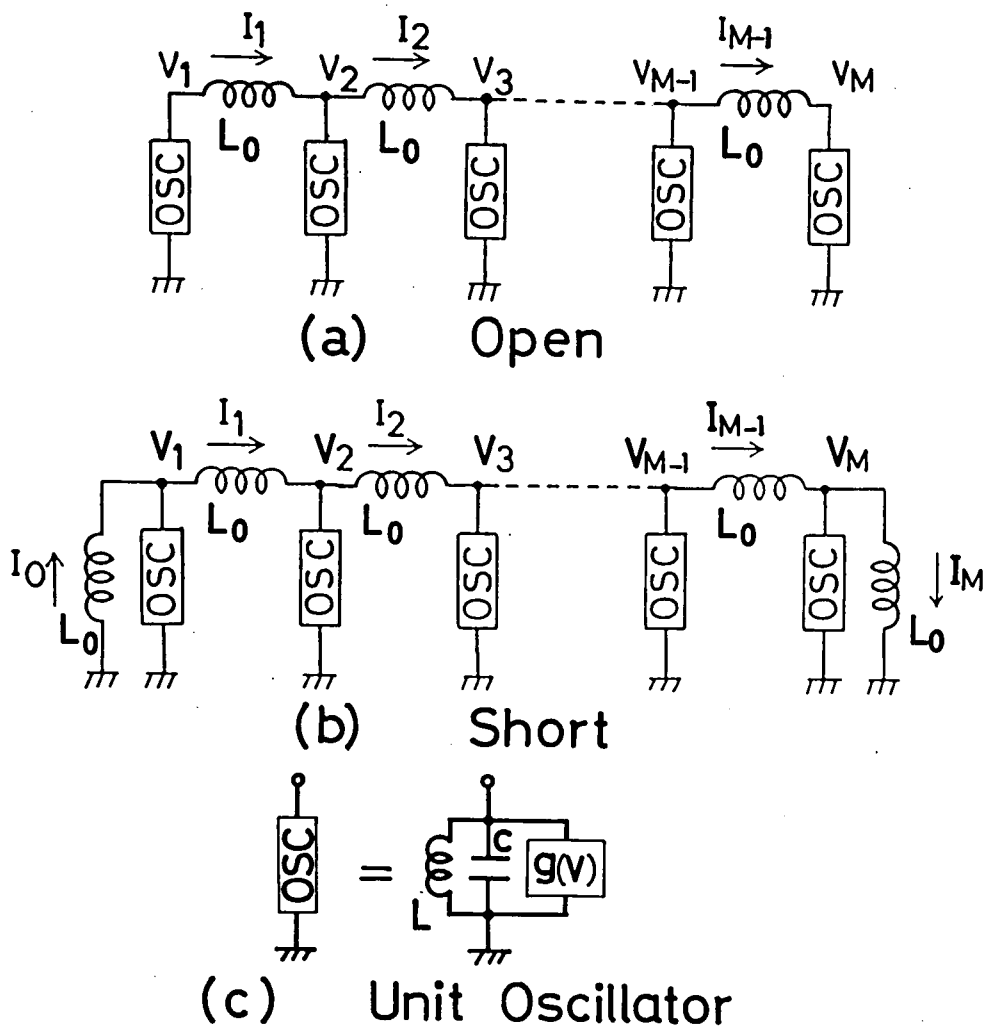


図 7.3 はしご状発振器

$$i = g(v) = \begin{cases} -v & |v| \leq 1 \\ +\infty & v > 1 \\ -\infty & v < -1 \end{cases} \quad (7.8)$$

(7.8) 式の特性を、図 7.1 に破線で併せて示した。

(7.8) 式の特性に対する電圧ポテンシャルは次式となる。

$$G(v) = \int i dv = \begin{cases} -v^2/2 & |v| \leq 1 \\ +\infty & |v| > 1 \end{cases} \quad (7.9)$$

図 7.2 の回路の平均ポテンシャルは、(7.9) 式に (7.3) 式の電圧を代入し、時間平均をとることで得られる。周波数 ω_m に特殊な関係がない非共振の場合を考えると、 $|v|$ の値は、 $(r_1 + \dots + r_M)$ まで大きくなり得る。 $|v|$ が 1 を越えると $G(v)$ は ∞ となるから、平均ポテンシャルは次のようになる。

$$U = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T G \left[\sum_{m=1}^M r_m \sin(\omega_m t + \theta_m) \right] dt$$

$$= \begin{cases} -(r_1^2 + r_2^2 + \dots + r_M^2)/4 & r_1 + \dots + r_M \leq 1 \\ +\infty & r_1 + \dots + r_M > 1 \end{cases} \quad (7.10)$$

この平均ポテンシャルを極小化する問題は、制約の下で平均ポテンシャルの 2 次項を極小化する次の問題と同じである。

$$\min U = \min_{r_1, \dots, r_M} -(r_1^2 + \dots + r_M^2)/4$$

$$\text{subject to } \sum_{m=1}^M r_m \leq 1, \quad r_m \geq 0 \quad (7.11)$$

図 7.3 のはしご状発振器では能動素子が M 個あり、その k 番目の素子の電圧 v_k は (7.6) 式で与えられるから、同様に、次の制約付極小化問題を得る。

$$\min U = \min_{r_1, \dots, r_M} -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^M \sum_{m=1}^M P_{mk}^2 r_m^2$$

$$\text{subject to } \sum_{m=1}^M |P_{mk}| r_m \leq 1 \quad (k = 1, \dots, M)$$

$$r_m \geq 0 \quad (m = 1, \dots, M) \quad (7.12)$$

7.2.3 凹 2 次計画問題とその解法

リミター特性に対する平均ポテンシャルの極小化問題 (7.12) 式を解くアルゴリズムを構成する。そのために必要な定理を 2 つ述べる。まず、説明の便宜上、問題 (7.12) 式を一般化して、変数 x_i が n 個、制約条件が m 個、目的関数 $f(x)$ が可能領域 F 上で C^1 級の狭義凹関数である問題を考える。問題の不等式条件は、スラック変数 x_i ($i = n+1, \dots, n+m$) を付加して等式制約に直せるから、可能領域 F は次のように書ける。

$$F = \{ x \mid x \in R^{n+m}, Ax = b, x \geq 0 \} \quad (7.13)$$

ただし、 A は $m \times (n+m)$ 行列

$$A = \left\{ \begin{array}{cccc|ccc} |P_{11}| & \cdots & |P_{n1}| & 1 & & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ |P_{1m}| & \cdots & |P_{nm}| & 0 & & 1 \end{array} \right\} \quad (7.14)$$

であり、 \mathbf{b} は m ベクトル $\mathbf{b} = (1, \dots, 1)^T$ である。

以上の記号を用いると、問題 (7.12) 式は次の形に書ける。

$$\begin{aligned} \text{[主問題]} \quad & \text{local min } f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in F \end{aligned} \quad (7.15)$$

目的関数 f を点 $\mathbf{x}_0 \in F$ の近傍で線形化した次の線形計画問題を LP 1 と呼ぶことにする。

$$\begin{aligned} \text{[LP 1]} \quad & \min \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x} \\ & \text{subject to } \mathbf{x} \in F \end{aligned} \quad (7.16)$$

上記の問題に対して、次の 2 つの命題が成り立つ。

【定理 1】 点 \mathbf{x}_0 が「主問題」の解ならば、 \mathbf{x}_0 は「LP 1」の孤立最適解である。

(証明) \mathbf{x}_0 が LP 1 の孤立解でないとする。

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathbf{x} \in F \quad 0 < |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}| < \varepsilon \\ \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x} \leq \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

$f(\mathbf{x})$ が狭義凹関数であるから、

$$f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}_0) + \nabla f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0)$$

となり、 \mathbf{x}_0 は主問題の解となり得ない。(証了)

【定理 2】 点 \mathbf{x}_0 が「LP 1」の孤立最適解ならば、 \mathbf{x}_0 は「主問題」の孤立解である。(証明は付録 F)。

一方、線形計画問題の孤立最適解は F の端点となることが知られている。⁽²³⁾したがって、「主問題」の解をすべて求めるには、 F の端点を順に探し、その点の最適性を定理 2 で確かめればよい。

以上の考察に基づき、主問題を解くアルゴリズムが次のように構成できる。

$$(1) \quad Y = \left\{ (y_1, \dots, y_{n+m}); \begin{array}{ll} y_i = 1 & n \text{ 個} \\ y_i = 0 & m \text{ 個} \end{array} \right\}$$

の要素 \mathbf{y} に対し、次の「LP 2」を解く。

$$\text{[LP 2]} \quad \min z = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x} \quad \text{subject to } \mathbf{x} \in F$$

(2) $z > 0$ ならば (4) へ。 $z = 0$ ならば端点が得られたので (3) へ行く。

(3) 端点 \mathbf{x}_0 について「LP 1」を解く。その解が \mathbf{x}_0 と一致すれば、極小解が得られたので記

録する。一致しなければ捨てる。

(4) Y の全要素 ($n+m C_m$ 個) について, (1) 以下をくり返す。

以上の結果を用いて, 次の法則が示せる。

[多重モード振動の上限則]

N 個のリミター型能動素子を用いた発振器で安定となる多重モード振動は, 高々 N 重モード振動までである。

(証明) 定理 1 により (7.16) 式の極小解は F の端点である。 F の端点 x は, F の許容基底解であるから, x の正の成分の個数は, 制約の個数 N を越えない。 (証了)

この性質は, 能動素子特性が 3 次式である場合に, 3.3 節で述べたが, 素子特性がリミターの場合でも成立することがわかった。能動素子が一般の軟発振特性である場合にも, この性質が成立すると思われるが, 未解決である。

7.3 1 個の能動素子をもつ発振器

能動素子 1 個の性質を調べるため, 多自由度発振器の最も簡単な例である図 7.2 の系を考える。

能動素子特性が多項式特性 (7.1) 式の場合の平均ポテンシャルは, (7.4) 式で与えられた。

平均ポテンシャル U が, m 重モード振動に対応する点 $R^* = (R_1^*, \dots, R_m^*)$

$$R_1^* > 0, \dots, R_m^* > 0, R_{m+1}^* = \dots = R_M^* = 0 \quad (7.18)$$

で極小となるための条件は, 4 章 (4.8) ~ (4.10) 式の 3 条件である。

平均ポテンシャル (7.4) 式に, 3 条件を適用すると, 具体的な安定条件は次のようになる。

[単一モード振動]

(7.4), (7.8) 式より, 単一モード振動の振幅 r は次式となる。

$$r^2 = R = \frac{n-1}{4} \sqrt{\frac{1}{n A_n}} = \frac{n-1}{4} \sqrt{\frac{4n-2}{2n C_n}} \quad (7.19)$$

この時, 抑制条件 (4.9) 式は次のように成立する。

$$\frac{\partial U}{\partial R_d} = -\frac{1}{4} + A_n \left(\frac{n!}{(n-1)!} \right)^2 R^{n-1} = \frac{n-1}{4} > 0 \quad (7.20)$$

よって, 単一モード振動は飽和特性の次数にかかわらず安定である。

[m 重モード振動]

m 重モード振動 ($m \geq 2$) は, $R_1 = R_2 = \dots = R_M$ の成立する等振幅のものに限られるが, 正定値条件 (4.10) 式が成立せず, すべて不安定となる (付録G)。

このように, 図 7.2 の系では単一モード振動のみが安定であり, 能動素子特性が 3 次式の場合 ($n = 2$) の性質がすべての n について保たれる。

特に, 2 自由度系 ($M = 2$) の平均ポテンシャル

9, 15 次式の場合について, 図 7.4 に示す。 r_1 軸, r_2 軸上にある単一モード振動に対応する点 (○印) は平均ポテンシャルの極小点 (池) であり, 2 重モード振動に対する平衡点 (×印) は峠点であり, 原点 (△印) は山である。また, ○-×-○ を結ぶポテンシャルの谷が存在し, その右上部は急峻な飽和による崖になっている。このように, 平衡点の位置は n の値によらず定性的に同一であるが, 地形の勾配は大きく変化することがわかる。

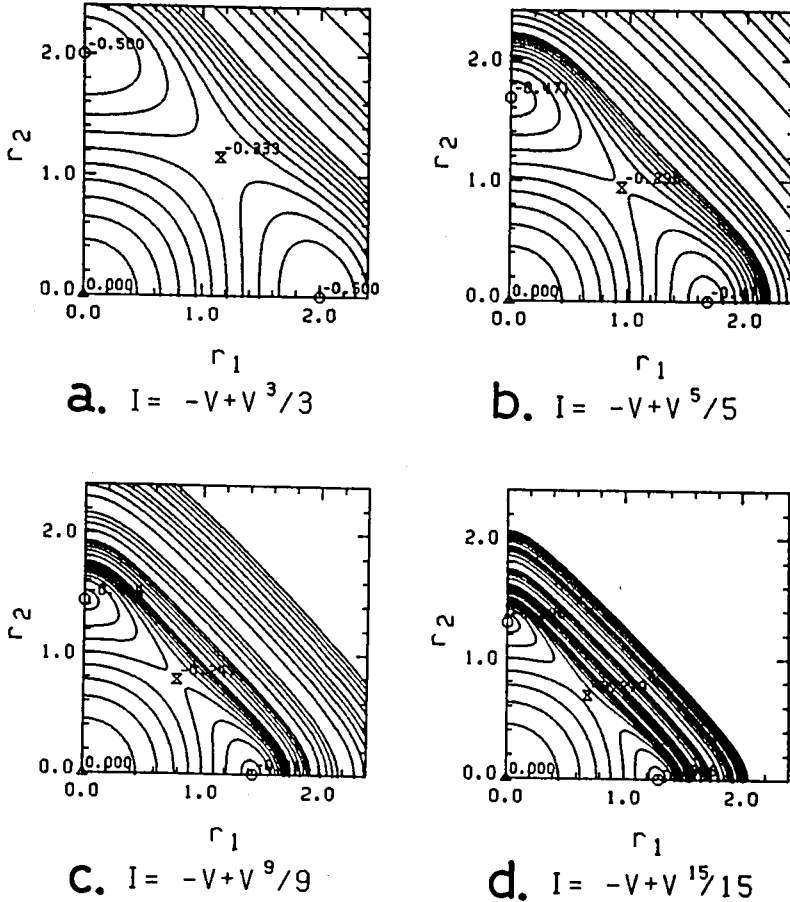


図 7.4 平均ポテンシャルの等高線図

次に、図 7.2 の系において、能動素子がリミター特性 (7.8) 式をとる場合を考える。前節の多重モード振動の上限則より、 M 個の単一モード振動のみが安定であることがわかる。

このように、(7.1) 式で表される急峻な飽和をもつ軟発振特性、あるいは (7.8) 式で表されるリミター特性の能動素子を 1 個用いた発振器では、非同期多重モード振動は安定にならず、単一モード振動のみが安定になることがわかった。さて、5.4 節で述べたように、一般の軟発振特性の能動素子を 1 個用いた発振器では、2 重モード振動が安定にならない。これらの性質を一般化して、「一般の軟発振特性の能動素子を 1 個用いた発振器では、非同期多重モード振動は安定とならない」、あるいは、一般化された多重モード振動の上限則「一般の軟発振特性の能動素子を N 個用いた発振器で安定となる非同期多重モード振動は、高々 N 重モード振動である」と予想されるが、証明は今後の課題である。

7.4 2 個の能動素子をもつ発振器

本節では、複数個の能動素子を用いた発振器の特殊な例として、2 個の能動素子を用いた 2 自由度系を考える。能動素子に加わる 2 つのモードは、図 7.5 に示すような一般的な形とし、モード形状を決めるパラメータ P_1 、 P_2 と系に生じる振動の関係を明らかにする。

能動素子にかかる電圧 v_1 、 v_2 を各々次のように仮定する。

$$\begin{aligned} v_1 &= r_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + P_2 r_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \\ v_2 &= P_1 r_1 \sin(\omega_1 t + \theta_1) + r_2 \sin(\omega_2 t + \theta_2) \end{aligned} \quad (7.21)$$

多項式特性 (7.1) 式の能動素子を用いた系の平均ポテンシャルは、(7.21) 式を (7.2) 式に代入し、(7.4) 式を用いて次のように求まる。

$$\begin{aligned} U(r_1, r_2) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [G(v_1) + G(v_2)] dt \\ &= -\frac{1}{4} (1 + P_1^2) R_1 - \frac{1}{4} (1 + P_2^2) R_2 \\ &\quad + A_n \sum_{j=0}^n ({}_nC_j)^2 (P_1^{2j} + P_2^{2n-2j}) R_1^j R_2^{n-j} \end{aligned} \quad (7.22)$$

ただし、 R_m 、 A_n は (7.5) 式で与える。以下、単一モードおよび 2 重モード振動について考察

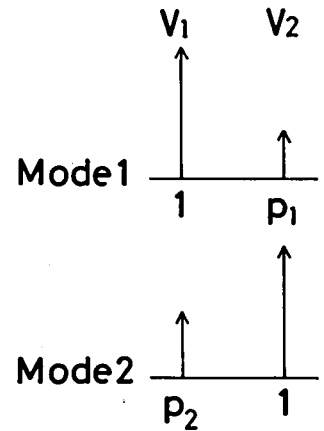


図 7.5 2 つのモードの形状

する。

〔単一モード振動〕

モード1の単一モード振動が生じるとすると、平衡条件(4.8)式より次式を得る。

$$\left. \frac{\partial U}{\partial R_1} \right|_{R_2=0} = -\frac{1}{4} (1 + P_1^2) + A_n (1 + P_1^{2n}) n R_1^{n-1} = 0 \quad (7.23)$$

(7.23)式より振幅 R_1 が定まる。安定条件は、モード2に対する抑制条件(4.9)式を考える。

$$\frac{\partial U}{\partial R_2} = -\frac{1}{4} (1 + P_2^2) + A_n n^2 (P_2^2 + P_1^{2n-2}) R_1^{n-1} > 0 \quad (7.24)$$

R_1 を(7.24)式に代入すると次式を得る。

$$n (1 + P_1^2) (P_2^2 + P_1^{2n-2}) - (1 + P_2^2) (1 + P_1^{2n}) > 0 \quad (7.25)$$

$P_2 \neq 0$ ならば、十分大きく n を選ぶことにより、(7.25)式を成立させることができる。

〔2重モード振動〕

平衡条件(4.8)式より次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_1} &= -\frac{1}{4} (1 + P_1^2) + A_n \sum_{j=1}^n n C_j^2 (P_1^{2j} + P_2^{2n-2j}) j R_1^{j-1} R_2^{n-j} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial R_2} &= -\frac{1}{4} (1 + P_2^2) + A_n \sum_{j=0}^{n-1} n C_j^2 (P_1^{2j} + P_2^{2n-2j}) (n-j) R_1^j R_2^{n-j-1} = 0 \end{aligned} \quad (7.26)$$

(7.26)式は(P_2 / P_1)に関する($n-1$)次方程式に整理でき、 P_1 、 P_2 に対して R_1 、 R_2 を求め、安定条件(4.9)、(4.10)式を確かめることができる。

次に、リミター特性(7.8)式の能動素子を用いた系を考える。この系に対する平均ポテンシャルの極小化問題は次の形となる。

$$\begin{aligned} \min_{r_1, r_2} & - \{ (1 + P_1^2) r_1^2 + (1 + P_2^2) r_2^2 \} \\ \text{subject to} & \begin{cases} r_1 + P_2 r_2 \leq 1 \\ P_1 r_1 + r_2 \leq 1 \\ r_1 \geq 0, r_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (7.27)$$

この系に生じる振動の振幅と安定範囲は次のようになる。

〔単一モード振動〕

$$r_1 = 1 \quad (0 \leq P_1 \leq 1 \text{ のとき}); \text{安定条件 } P_2 \neq 0$$

$$r_1 = 1/P_1 \quad (1 < P_1 \text{ のとき}) ; \text{安定条件 } 0 < P_2 < \infty$$

モード2の単一モードについても同様である。

〔2重モード振動〕

$$r_1 = (1 - P_2) / (1 - P_1 P_2)$$

$$r_2 = (1 - P_1) / (1 - P_1 P_2)$$

(7.28)

$0 < P_1 < 1$, $0 < P_2 < 1$ の場合の安定条件は,

$$P_2 (1 + P_1^2) (1 - P_2) < (1 + P_2^2) (1 - P_1)$$

$$P_1 (1 + P_2^2) (1 - P_1) < (1 + P_1^2) (1 - P_2)$$

(7.29)

である。

以上の結果を用いて, $2n-1 = 3, 5, 7, 19, 29$ 次式の多項式特性およびリミター特性に対して求めた単一モードおよび2重モード振動の発生領域を, 図7.6 a~eおよびfに示す。図中, S1, S2 は各々モード1, 2の単一モード振動, Dは2重モード振動の安定となる領域を示す。

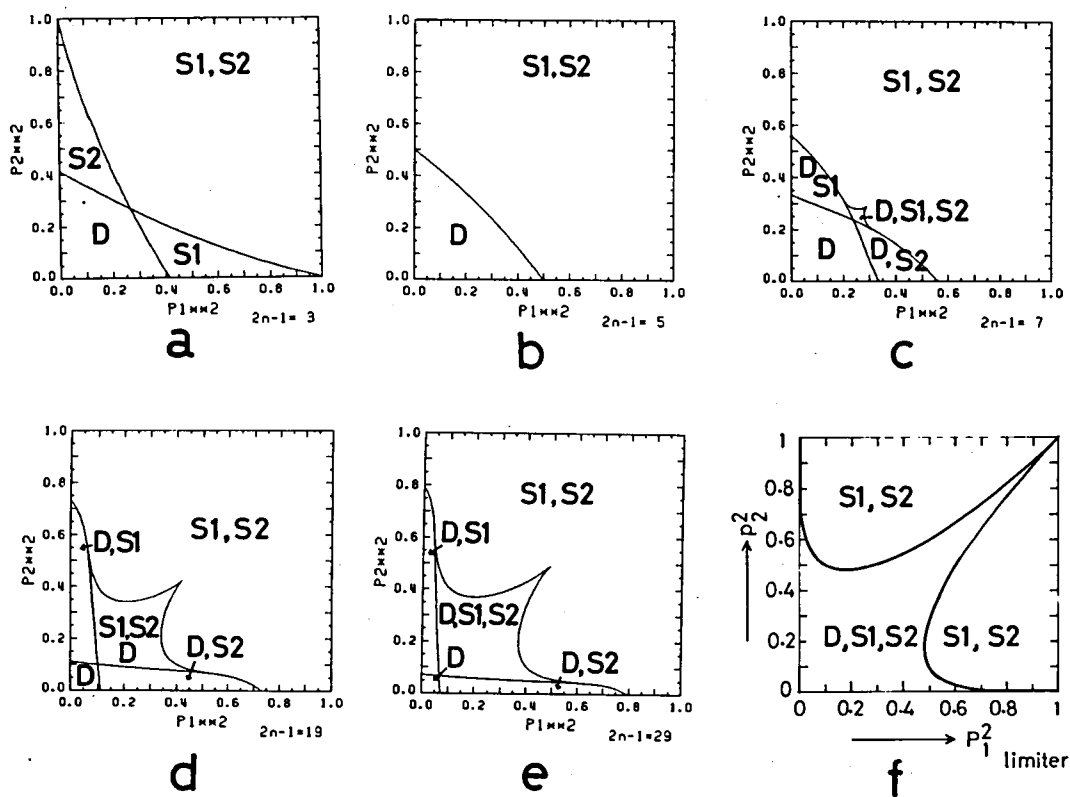


図7.6 単一モード振動 (S1, S2) および
2重モード振動 (D) の発生領域

単一モード振動の発生領域は n の増加と共に広がり、リミター型では、 $P_1 = 0$ または、 $P_2 = 0$ である軸上を除く領域で単一モード振動が安定となる。図 7.6 a～e と比べると、 $2n-1 \rightarrow \infty$ の極限として図 f があることがわかる。

また、 $2n-1 = 3$ の場合 (図(a))、単一モード振動と 2 重モード振動が共に安定なる領域は存在しない。これは、3.3 節で述べた「部分モード振動の禁止則」が成立しているからである。 $2n-1 = 5$ (b) の場合も同様である。しかし、 $2n-1 = 7$ (c) の場合、2 重モード振動とその部分モードの単一モード振動が共に安定となる領域が生じる。すなわち、3 次特性の場合に得られた「部分モード振動の禁止則」は、軟発振特性の発振器一般に通用する法則ではない。

このように、能動素子の特性が同じように軟発振特性であっても、飽和の次数により各振動の生じる領域は異なる。しかし、 $P_1 = P_2 = 0$ の近くでは 2 重モード振動が生じ、 $P_1 = P_2 = 1$ の近くでは単一モード振動が生じるという性質 (3.5 節参照) は変らない。これは、 $P_1 = P_2 = 0$ または $P_1 = P_2 = 1$ の場合には、各々の能動素子に単一の正弦波が最適 (平均ポテンシャルを最小とする) な振幅で加わる状態を実現でき、「満場一致原理」に従って、系全体の平均ポテンシャルを最小とするからである。

7.5 はしご状発振器

本節では、図 7.3 に示したはしご状発振器に生じる振動が、能動素子の飽和項によってどの程度変るかを考察する。図 7.3 (a), (b) の系を、その終端条件から、各々、開放系、接地系と呼ぶ。

能動素子の特性が (7.1) 式で与えられる多項式特性の場合、平均ポテンシャルは (7.7) 式となることを述べた。その極小点を求めることにより、系に生じる振動を求められる。

〔単一モード振動〕

周波数 ω_m の単一モード振動を考える。 R_m 以外の R_j を 0 とおき、平衡条件 (4.8) 式より次式を得る。

$$\frac{\partial U}{\partial R_m} = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^M P_{mk}^2 + A_n \sum_{k=1}^M P_{mk}^{2n} \cdot n R_m^{n-1} = 0 \quad (7.30)$$

モード d に対する抑制条件 (4.9) 式は次式となる。

$$\frac{\partial U}{\partial R_d} = -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^M P_{dk}^2 + A_n \sum_{k=1}^M P_{mk}^{2n-2} \cdot P_{dk}^2 \cdot n^2 \cdot R_m^{n-1} > 0$$

$$(\forall d, d \neq m) \quad (7.31)$$

(7.30) 式の R_m を (7.31) 式に代入し、次の安定条件を得る。

$$n \left(\sum_{k=1}^M P_{mk}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^M P_{mk}^{2n-2} \cdot P_{dk}^2 \right) > \left(\sum_{k=1}^M P_{dk}^2 \right) \left(\sum_{k=1}^M P_{mk}^{2n} \right) \quad (d = 1, \dots, M; d \neq m) \quad (7.32)$$

P_{mk} が定まると、 n を十分大きくとれば、(7.32) 式が成立することを示す。モード m が飽和する能動素子の位置を k' とする。すなわち、

$$\max_k P_{mk}^2 = P_{mk'}^2 \quad (7.33)$$

この時、 $P_{dk'} \neq 0$ ならば、 n を次のように選べば (7.32) 式がみたされる。

$$n > M \frac{\sum_{k=1}^M P_{dk}^2}{\sum_{k=1}^M P_{mk}^2} \cdot \frac{P_{mk'}^2}{P_{dk'}^2} \quad (7.34)$$

$P_{dk'} = 0$ なるモードが存在すると、一般にこのモードが励起されるため、モード m の単一モード振動は不安定になる。一般には、能動素子特性の次数 $(2n-1)$ を十分大きくすると、ほとんどのモードが単一モード振動として安定になる。

〔2重モード振動〕

モード m とモード l の2重モード振動を考える。平衡条件 (4.8) 式を書き下す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial R_m} &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^M P_{mk}^2 + A_n \sum_{j=1}^n H_j \cdot j R_m^{j-1} R_l^{n-j} = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial R_l} &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^M P_{lk}^2 + A_n \sum_{j=0}^{n-1} H_j \cdot (n-j) R_m^j R_l^{n-j-1} = 0 \end{aligned} \quad (7.35)$$

ただし、

$$H_j = {}_n C_j^2 \sum_{k=1}^M P_{mk}^{2j} P_{lk}^{2n-2j} \quad (j = 0, \dots, n) \quad (7.36)$$

(7.35) 式は (R_m/R_l) に関する $(n-1)$ 次方程式に整理でき、 R_m 、 R_l に関して解くことができる。それらを用いて、(7.7) 式に抑制条件、正定値条件をチェックすれば、2重モード振動の安定性を判別できる。

3重モード以上の振動については、上述のような計算はさらに困難となるが、数値的に安定解のいくつかを求めることはできる。

次に能動素子がリミター型の特徴をもつ場合を解析する。モードの形 P_{mk} は、 k について

対称 ($P_{mk} = \pm P_{m, M-k+1}$) であるから, リミター作用としては, $k = 1, \dots, [(M+1)/2]$ を考えればよい。すなわち, 平均ポテンシャルの極小化問題は次の形となる。

$$\begin{aligned} \min_{r_1, \dots, r_M} \quad & - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^M P_{mk}^2 r_m^2 \\ \text{subject to} \quad & \sum_{m=1}^M |P_{mk}| r_m \leq 1 \quad (k = 1, \dots, [\frac{M+1}{2}]) \\ & r_m \geq 0 \quad (m = 1, \dots, M) \end{aligned} \quad (7.37)$$

前述のアルゴリズムを適用して, $M = 2 \sim 10$ に対して安定な振動を求めた。

結果の一部を, 表 7.1 ~ 7.2 に示す。

表 7.1 急峻な飽和特性素子をもつはしご状発振器に生じる振動 (6 段開放)

s : 単一モード振動 d : 2 重モード振動 t : 3 重モード振動

Order of Nonlinearity	Type & No of Oscillation	Mode No. & its Amplitude					
		1	2	3	4	5	6
3	s - 2	2.000			2.000		
	d - 2		1.265				1.265
	d - 2			1.265		1.265	
5	s - 2	1.682			1.682		
	d - 2		1.034				1.034
	d - 2			0.930		1.139	
7	s - 3	1.529		1.249	1.529		
	d - 2		0.920				0.920
	d - 2			0.793		1.058	
19	s - 3	1.248		1.019	1.248		
	d		0.632				0.758
	d - 3		0.758				0.632
	d			0.576		0.879	
27	s - 5	1.189	0.887	0.971	1.189		0.887
	d		0.513				0.767
	d - 3		0.767				0.513
	d			0.534		0.839	
	t - 1		0.647	0.078			0.647
Limiter	s - 5	1.000	0.732	0.816	1.000		0.732
	d		0.366				0.634
	d - 3		0.634				0.366
	d			0.408		0.707	
	t - 1		0.500	0.109			0.500

表 7.2 急峻な飽和特性素子をもつはしご状発振器に生じる振動（5 段接地）

Order of Nonlinearity	Type & No. of Oscillation	Mode No. & its Amplitude				
		1	2	3	4	5
3	s - 4	1.633	1.633		1.633	1.633
5	s - 5	1.338	1.373	1.189	1.373	1.338
21	s - 3		1.004	0.870	1.004	
	d	0.913	0.058			
	d - 4	0.913			0.058	
	d		0.058			0.913
	d				0.058	0.913
Limiter	s - 3		0.817	0.707	0.817	
	d	0.707	0.109			
	d - 4	0.707			0.109	
	d		0.109			0.707
	d				0.109	0.707

表 7.1 は 6 段 ($M=6$) の開放系, 表 7.2 は 5 段 ($M=5$) の接地系の結果を示す。表の type 欄は, 生じる振動の種類 (s: 単一, d: 2 重, t: 3 重モード振動) を示す。単一モード振動は同一行に全部を記入した。なお, 能動素子の次数は, $2n-1=3$ から 31 まで変化させたが, 安定な振動の種類が変化した次数のみを記した。最下段はリミター型の場合である。

表 7.1, 7.2 から, 次のことがわかる。

- (1) 開放系では, 次数に従って包含関係が成立し, 次数の増加に伴って安定な振動の数が増える。
- (2) 接地系では, 低次で安定であった単一モードが, 高次で不安定になることがある (表 7.2: モード 1, 5)。モード 1, モード 5 では, $k=3$ の素子が飽和する。しかし, モード 2, 4 は $P_{m_3}=0$ であり, この飽和により抑制されない。このため, ある次数以上ではモード 1, 5 の単一モード振動は安定にならない。
- (3) 両系とも, ある次数以上 ($2n-1 \geq 27$) では, 安定な振動の種類が一定となり, リミター型と一致する。すなわち, リミター型特性は非常に高次の多項式特性のよい近似となる。
- (4) 開放系では, $M \geq 6$ で, 3 次特性では見られなかった 3 重モード振動が生じる。

- (5) 接地系では、 M の偶奇で現象が異なる。 M が偶数の場合、3次特性でも安定であった M 個の単一モード振動が生じる。また、 $2^{M/2}$ 個の $M/2$ 重モード振動が生じる。 M が奇数の場合には、表7.2に示したように一般的な特徴はない。

以上のように、能動素子を多数用いたはしご状発振器では、能動素子の飽和項の急峻さにより系に生じる現象は変化する。これは、図7.4に示したように、1個の能動素子の平均ポテンシャルの性質は定性的に同じでも、定量的には差があるため、複数個の能動素子の働きとしては、大きな差となって表れるためである。

以上の解析結果を確かめるため、図7.3の回路のデジタル計算機によるシミュレーションを行なった。段数が5段、能動素子特性が27次式の系について解析結果と同様の結果を得た。

7.6 む す び

本章では、急峻に飽和する能動素子を用いた多自由度発振器に生じる振動について調べた。まず、急峻に飽和する能動素子の特性を、高次多項式、あるいはリミターによって表し、発振器に生じる非同期多重モード振動を調べた。特に、リミター特性の能動素子を用いた発振器の解析法として、平均ポテンシャルの制約条件下での極小点を求める方法を提案した。

解析の結果、次の事実がわかった。

- (1) 能動素子を1個だけ用いた発振器では、飽和特性の急峻さにかかわらず、単一モード振動のみが安定であった。この性質は、3章で述べた3次特性の能動素子を用いた場合と同じである。さらに、3章で3次特性の場合に示した「多重モード振動の上限則」が、リミター特性の場合にも成立することを示した。これは、一般的な軟発振特性の能動素子を用いた多自由度発振器全般に成立する基本的な性質と思われる。
- (2) 2個の能動素子を用いた発振器では、系のモードの形状と、それらのモードが単一モードあるいは2重モード振動として安定になる条件との関係を調べた。すべての能動素子に同程度の飽和を与える形状のモードは単一モード振動になり、相補的な形状の2つのモードは2重モード振動になるという傾向は、能動素子の飽和の程度により変化しない。しかし、その安定領域が定量的には変化することがわかった。その結果、3章で述べた「部分モードの禁止則」が成立しなくなることを示した。すなわち、1つのモードが、単一モードおよび2重モード振動の成分となって現れ得ることが明らかになった。
- (3) はしご状発振器において、素子の飽和の次数が高くなると、系に生じる振動が定性的にも変化することがわかった。これは、はしご状発振器においては、多数の能動素子の

バランスによって安定な振動モードが決定されるために、素子特性の小さな変化によって系全体の現象が変化をきたすためと理解できる。

また、はしご状発振器に生じる振動の変化は、飽和次数の変化に対してほぼ連続的であった。そこで、3次特性およびリミター特性の2つの場合を調べておけば、高次の飽和特性の発振器に生じる現象についての類推は可能であると考えられる。

このように、能動素子を多数用いた多自由度発振器では、能動素子特性が定性的には同じ軟発振特性であっても、特性の飽和の程度によって系に生じる現象が定性的に異なる場合があることが明らかになった。この場合のように、複雑な系に生じる現象は、能動素子の特性を精密にモデル化しない限り、定性的な解析すら困難になる。従来、素子特性を3次式で近似するというモデルの精度以上に、現象の細部を論じるということがなかったか反省の余地があろう。

8. 平均ポテンシャルの非線形復元力をもつ 自励振動系への拡張

8.1 ま え が き

本章では、平均ポテンシャルを、非線形復元力をもつ自励振動系の解析に拡張して適用する。

2章では、線形復元力を有する多自由度振動系の解析法として、平均ポテンシャルを用いる方法を導入した。平均ポテンシャルは、系内の損失分を表す関数であり、その極小点が安定な振動に対応する。本章では、非線形復元力をもつ1自由度自励振動系の場合に、平均ポテンシャルの概念を拡張する。まず、損失を無視した非線形保存系に生じる振動を求める。次に、この振動によって抵抗部に生じる損失分を平均ポテンシャルと定義する。このように形式的に拡張した平均ポテンシャルと平均化方程式が対応するためには、復元項が単項式である等の条件が必要となる。この条件が満たされない場合には、平均ポテンシャルの極小点と安定な振動の間に、ずれが生じる。

このように、非線形復元力をもつ系に対しては、拡張した平均ポテンシャルと平均化方程式は必ずしも厳密な対応を示さない場合がある。以下では、この関係が厳密となる、復元項が単項式となる場合を考える。

8.3節では、非線形復元力をもつ自励系の例として、単項式で表される復元項と、5次式で表される能動素子特性をもつ硬い発振器について考察する。第6章で述べたように、能動素子にとって、損失分を最小にできるという意味で、方形波が理想的な波形である。この事実からすれば、8.3節で考察する発振器の非線形生成系が方形波に近い波形を生じさせる場合には、正弦波発振より発振が生じやすくなることが予想される。実際、これを確かめることができる。

8.2 非線形保存系を生成系とする系への平均ポテンシャルの拡張

本節では、平均ポテンシャルの概念を非線形保存系を生成系にもつ系に拡張する。2章では、線形生成系に対する平均ポテンシャルは、次のように構成された。

- 1) 回路中の抵抗素子を短絡あるいは開放して線形保存系を作る。
- 2) 保存系の解を、正弦波の重ね合わせで表現する。
- 3) 保存系の解によって、各抵抗素子から生じる損失分を求め、その時間平均をとる。

この時、保存系が線形であることは、次の2点で利用している。

- 1) 解が、正弦関数という性質のよくわかった直交関数系で仮定できること。

Ⅱ) 多自由系であっても、解が重ね合せで表現できること。

さて、回路中に非線形インダクターを含むような回路では、抵抗素子を除いて保存系を作っても、これはなお非線形系であり、従来の平均ポテンシャル法は適用できない。しかし、非線形インダクターの特性が簡単で、系の自由度が小さければ、この非線形保存系の解は楕円関数等の既知の関数で書ける。これを利用して平均ポテンシャルの概念を拡張することを考える。

図 8.1 のような、非線形コンダクター、非線形インダクター、および線形キャパシタからなる 1 自由度発振器を考える。 x を磁束 ϕ に対応させ、適当な規格化を行なえば、系は次式で記述される。

$$\ddot{x} + \mu g(\dot{x}) + f(x) = 0 \quad (8.1)$$

$$\dot{} \equiv \frac{d}{dt}$$

ここで、 $g(\dot{x})$ 、 $f(x)$ は、各々コンダクター、インダクターの特性を示す。 μ が微小（弱損失）のとき、(8.1) 式の解は $\mu = 0$ とおいた保存系（生成系）の解で近似される。

$$\ddot{x} + f(x) = 0 \quad (8.2)$$

(8.2) 式に \dot{x} をかけ、時間で積分することにより、生成系では次式のエネルギー E が保存されることがわかる。

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \int f(x) dx \quad (8.3)$$

生成系の周期解を、 E をパラメータとした次の形におく、ただし、 T_E は一般的に E に依存する周期を表す。

$$\dot{x} = P(t / T_E; E) \quad (8.4)$$

この時、(8.1) 式より、エネルギー E の一周期にわたる増減は次式に従う。

$$\begin{aligned} \overline{\dot{E}} &= \overline{-\mu g(\dot{x}) \dot{x}} \\ &= -\int_0^1 \mu g[P(\tau; E)] \cdot P(\tau; E) d\tau \end{aligned} \quad (8.5)$$

定常状態では、一周期にわたるエネルギーの出入は平衡する。

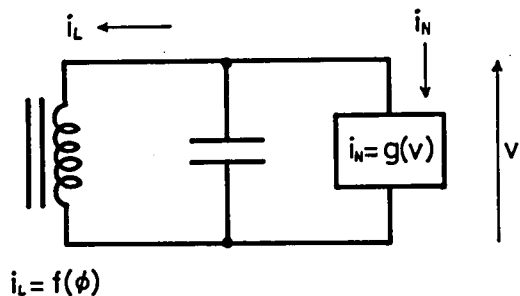


図 8.1 非線形復元力をもつ
1 自由度発振器

$$\overline{\dot{E}} = - \int_0^1 \mu g[\dot{x}(\tau; E)] \cdot \dot{x}(\tau; E) d\tau = 0 \quad (8.6)$$

この式を、パワー平衡の式と呼ぶことにする。

一方、(8.1)式の散逸関数 $G(\dot{x})$ を、次式で定義する。

$$G(\dot{x}) = \int \mu g(\dot{x}) d\dot{x} \quad (8.7)$$

$G(\dot{x})$ の平均として、拡張された平均ポテンシャル $U(E)$ を形式的に定義する。

$$U(E) = \int_0^1 \mu G[\dot{x}(\tau; E)] d\tau \quad (8.8)$$

すると、(8.7)、(8.8)式より次式が成立する。

$$\frac{\partial U}{\partial E} = \int_0^1 \mu g[\dot{x}(\tau; E)] \cdot \frac{\partial \dot{x}(\tau; E)}{\partial E} d\tau \quad (8.9)$$

ここで、次式

$$\frac{\partial P(\tau; E)}{\partial E} = C(E) \cdot P(\tau; E) \quad (8.10)$$

が成立すれば、(8.5)式は U の勾配系で表現できる。

$$\overline{\dot{E}} = - \frac{1}{C(E)} \cdot \frac{\partial U}{\partial E} \quad (8.11)$$

(8.10)式は、 E によって $P(\tau)$ の振幅が変わってもその波形が不変であることを要請している。ただし、時間軸は周期 T_E で規格化して考える。

$f(x)$ が x の単項式であれば、(8.10)式が成立する。すなわち $f(x) = x^{2n-1}$ とおくと、 $P(t)$ が(8.2)式の解ならば、任意の正定数 C に対して、 $C \cdot P(C^{n-1}t)$ も(8.2)式の解となるからである。

さて、 $f(x)$ が単項式でない場合、一般には(8.10)式の条件は成立しない。 $f(x)$ を3次式として、(8.6)式を解いた定常状態の正しい E の値と、拡張された平均ポテンシャルを極小とする E の値((8.11)式=0の解)との間にずれが生じる例を次に示す。

(8.1)式において、

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \alpha x^3 \\ g(\dot{x}) &= -\dot{x} + \dot{x}^3/3 \end{aligned} \quad (8.12)$$

とおく。(8.3)式より、エネルギー $-E$ は、

$$E = \dot{x}^2/2 + x^2/2 + \alpha x^4/4 \quad (8.13)$$

となる。

次に φ を時間 t の関数として、

$$\begin{aligned} x &= a \sin \varphi \\ \dot{x} &= a \cos \varphi \cdot \dot{\varphi} \end{aligned} \quad (8.14)$$

とおく。(8.14) 式を (8.13) 式に代入して、次式を得る。

$$\dot{\varphi}^2 = 1 + \alpha a^2 (1 + \sin^2 \varphi) / 2 \quad (8.15)$$

(8.14), (8.15) 式より, \dot{x}' の平均 W_I は次式で計算できる。

$$\begin{aligned} W_I &= \overline{\dot{x}'} = \frac{1}{T_E} \int_0^{T_E} \dot{x}' dt \\ &= \frac{a'}{T_E} \int_0^{2\pi} \cos' \varphi \left[\sqrt{1 + \frac{\alpha a^2}{2} (1 + \sin^2 \varphi)} \right]^{l-1} d\varphi \end{aligned} \quad (8.16)$$

(8.16) 式より, パワー平衡条件 (8.6) 式は、

$$\overline{\dot{E}} = -\mu (-W_2 + W_4 / 3) = 0 \quad (8.17)$$

となり, これが成立するとき, a は正しい定常振幅を与える。

一方, (8.8) 式より平均ポテンシャル U は次式となる。

$$\overline{U}(a) = -W_2 / 2 + W_4 / 12 \quad (8.18)$$

なお, T_E は次式で与えられる。

$$T_E = \frac{4}{\sqrt{1 + \alpha a^2}} K \left(\sqrt{\frac{\alpha a^2}{2(1 + \alpha a^2)}} \right) \quad (8.19)$$

ただし, $K(k)$ は第 1 種完全楕円積分を表す。

さらに, 比較のため, 解を単純な正弦波と仮定して平均法を適用してみる。すなわち, (8.14) 式の代りに、

$$\begin{aligned} x &= a \sin \omega t \\ \dot{x} &= a \omega \cos \omega t \end{aligned} \quad (8.20)$$

とおき, 生成系 (8.2) 式に代入して基本波成分 = 0 とおくことにより、

$$1 - \omega^2 + \frac{3}{4} \alpha a^2 = 0 \quad (8.21)$$

を得る。(8.20), (8.21) 及び (8.6) 式より, \dot{x} の振幅 $a \omega = 2$ となり, 次式が得られる。

$$a^2 = \frac{2}{3\alpha} (\sqrt{1 + 12\alpha} - 1) \quad (8.22)$$

図 8.2 に、(8.17)、(8.18)、(8.22) 式より求めた振幅を示す。図中、 $p-p'$ 線は、パワー平衡の式 (8.17) 式より求めた a で、(8.1) 式を直接シミュレーション ($\mu = 0.1$) して得た a の値 (○印) とよく一致する。一方、図中 $u-u'$ 線は、拡張された平均ポテンシャル U (8.18) 式を極小とする a を示す。 $s-s'$ 線は、解を正弦波で仮定した (8.22) 式より求めたものである。

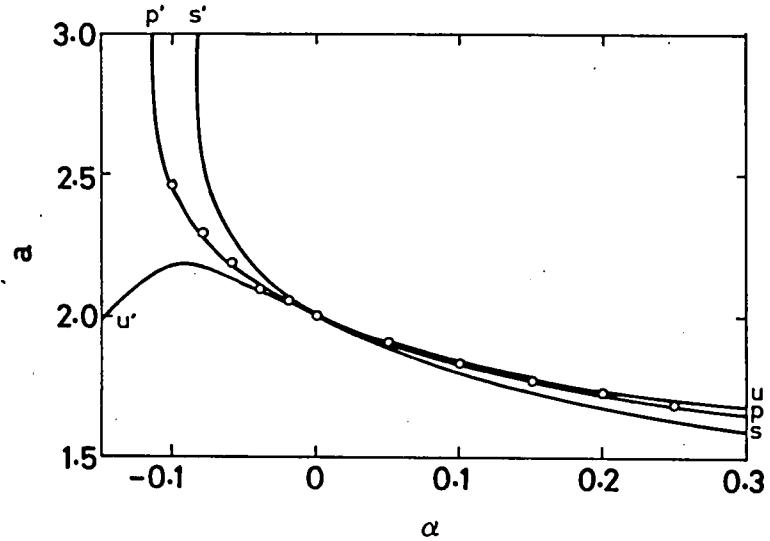


図 8.2 $\ddot{x} + \mu g(\dot{x}) + f(x) = 0$ の振幅特性

$$\begin{aligned} \text{ただし } f(x) &= x + \alpha x^3 \\ g(\dot{x}) &= -\dot{x} + \dot{x}^3/3 \end{aligned}$$

$\alpha > 0$ の範囲では、平均ポテンシャル U (8.18) 式を極小とする $u-u'$ 線は、パワー平衡条件 $p-p'$ 線とよく一致する。しかし、 $\alpha < 0$ となると、 $u-u'$ 線は、 $p-p'$ 線、あるいはシミュレーション結果からかなりずれる。特に、 $\alpha < -0.12$ では、シミュレーションによれば解は発散するが、 $u-u'$ 線からはこの状況がつかめない。これは、 $\alpha < 0$ となると、生成系における波形の変化が急激で、(8.10) 式が近似的にも成立しないためと考えられる。

これに対して、解を正弦波で仮定した $s-s'$ 線は、近似の程度は良くないが、 $\alpha < 0$ での振幅の発散傾向を表している。

このように、非線形保存系を生成系とする系では、保存系に出入するパワーの平衡式 (8.6) 式が本質的であり、形式的に定義された平均ポテンシャル (8.8) 式の極小点は、(8.6) 式と一致しない。

(8.1) 式を直接シミュレーションして得られた波形を図 8.3 に示す。 $\alpha = 0$ では、van der Pol 方程式の解である正弦波状の波形が得られる。 $\alpha > 0$ では、周波数が高くなり、 x の波形は三角波に、 \dot{x} の波形は方形波に近くなる。 $\alpha < 0$ とすると、 \dot{x} の波形は三角波に近くなり、 $\alpha < -0.12$ では振動は発散してしまう。これは、 $f(x)$ の項が復元力として働かなくなるためである。

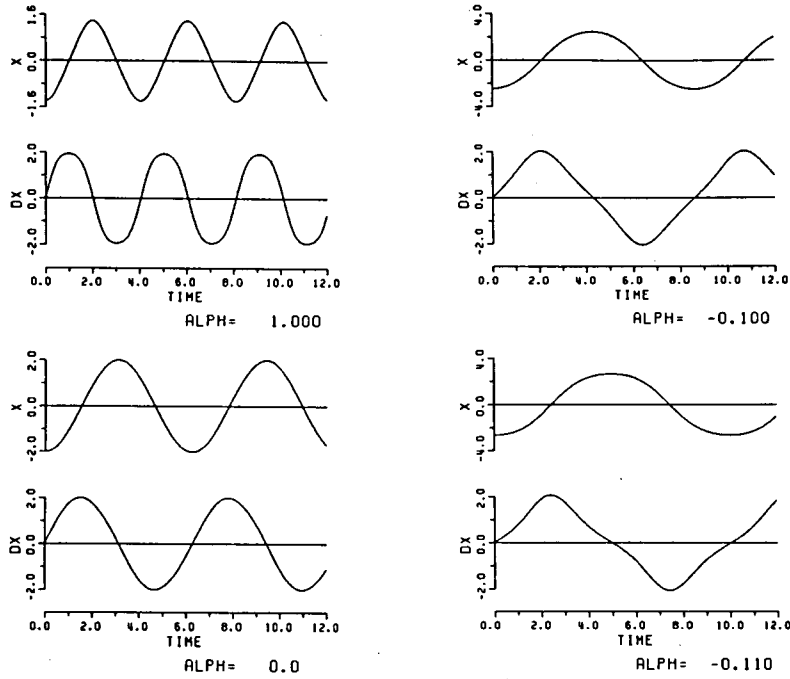


図 8.3 $\ddot{x} + \mu g(\dot{x}) + f(x) = 0$ のシミュレーション波形
ただし, $g(\dot{x}) = -\dot{x} + \dot{x}^3/3$
 $f(x) = x + \alpha x^3$

8.3 硬い発振器特性をもつ Duffing-van der Pol 発振

第6章で述べたように, 1個の能動素子を用いた発振器において, 方形波がその能動素子の損失分を最小にする。そこで, 適当な周波数成分が用意された多自由度発振器では, 損失分を小さくするために方形波近似波形をとる同期振動が生じる。

このように, 能動素子にとって, 方形波は損失分を最も小さくできるという意味で理想の波形である。そこで, 方形波に近い振動を生じるような非線形生成系をもつ系では, 発振が生じやすくなると考えられる。

本節では, 硬い発振特性をもつ Duffing-van der Pol 方程式

$$\ddot{x} + \mu \left(\dot{x} - \frac{\beta}{3} \dot{x}^3 + \frac{1}{5} \dot{x}^5 \right) + f(x) = 0 \quad (8.23)$$

を例題として, 生成系の波形と発振の生じやすさについて考察する。

8.3.1 生成系の波形と安定限界

(8.23) 式において, $f(x) = x$ である場合, 4章でも述べたように, $\beta \geq \sqrt{8}$ でなければ

発振が生じないことが知られている⁽²⁴⁾。この発振限界の β の値は、生成系が生成する振動波形により変化する。生成系が方形波、あるいは三角波を生じる場合を仮想して、発振限界を調べてみる。

まず、生成系が振幅 r の方形波を生じる場合を考える。(8.8)式に従って平均ポテンシャルを求めると次式を得る。

$$G(\dot{x}) = \int g(\dot{x}) d\dot{x} = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{\beta}{12} \dot{x}^4 + \frac{1}{30} \dot{x}^6 \quad (8.24)$$

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G[r \operatorname{sign}(\sin \theta)] d\theta \\ &= G(r) = \frac{1}{2} r^2 - \frac{\beta}{12} r^4 + \frac{1}{30} r^6 \end{aligned} \quad (8.25)$$

(8.25)式の $U(r)$ が極値をもつのは、 $\beta \geq \sqrt{7.2}$ である。したがって、理想的な方形波を生じる生成系をもつ発振器では、発振限界は $\beta = \sqrt{7.2}$ まで下がる。

逆に発振限界が高くなる例として、生成系が振幅 r の三角波を出す場合を考える。この時、平均ポテンシャルは次式となる。

$$\begin{aligned} U(r) &= \frac{1}{2r} \int_{-r}^r G(\dot{x}) d\dot{x} \\ &= \frac{1}{6} r^2 - \frac{\beta}{60} r^4 + \frac{1}{210} r^6 \end{aligned} \quad (8.26)$$

(8.26)式に極小点があるためには、 $\beta \geq \sqrt{60/7} \doteq \sqrt{8.57}$ でなければならない。すなわち、発振限界が高くなる。

8.3.2 復元項が単項式で表される硬い発振現象

前節で述べたように、 $f(x)$ が単項式の場合には、平衡状態で平均ポテンシャルによる厳密な考察が可能である。

(8.23)式において、 $f(x) = x^{2n-1}$ とする。すると、(8.3)式によって定まる次のエネルギーが保存量となる。

$$E = \frac{1}{2} \dot{x}^2 + \frac{1}{2n} x^{2n} \quad (8.27)$$

(8.14)式と同様に解を仮定し、(8.27)式に代入して次式を得る。

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{a^{2n-2}}{n} \frac{1 - \sin^{2n} \varphi}{1 - \sin^2 \varphi} \quad (8.28)$$

$(\dot{x})'$ の平均は次のようになる。

$$\overline{\dot{x}'} = \frac{1}{T_E} \int_0^{T_E} (\dot{x}') dt = (\sqrt{2E})' V_I / V_0 \quad (8.29)$$

ただし,

$$\begin{aligned} V_I &= \int_0^{\pi/2} \cos^l \varphi \left(\sqrt{\frac{1 - \sin^{2n} \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}} \right)^{l-1} d\varphi \\ &= \int_0^1 (\sqrt{1 - u^{2n}})^{l-1} du \\ &= \frac{1}{n} \int_0^1 s^{\frac{1-n}{n}} (\sqrt{1 - s^2})^{l-1} ds \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$E = a^{2n} / 2n \quad (8.31)$$

(8.30) 式より次の関係を得る。^(21, vol I p114)

$$V_I = \frac{n(l-1)}{n(l-1)+1} V_{l-2} \quad (8.32)$$

平均ポテンシャルは, (8.29) 式を用いて, (8.24) 式を平均化した次の形となる。

$$U(E) = (E V_2 - \frac{\beta}{3} E^2 V_4 + \frac{4}{15} E^3 V_6) / V_0 \quad (8.33)$$

(8.31) 式が E に関して極小点をもつためには,

$$\beta^2 > \frac{36 V_6 V_2}{5 V_4^2} \quad (8.34)$$

でなければならない。

(8.34) 式に (8.32) 式の関係代入すると, 発振限界は次のようになる。

$$\beta^2 \geq 12 \frac{3n+1}{5n+1} \quad (8.35)$$

n が増加すると, 発振限界の β^2 値が $8 (n=1)$ から下り, $n \rightarrow \infty$ では $\beta^2 = 7.2$ となることがわかる。 n が大となれば, $f(x)$ は急に飽和するので x は三角波, \dot{x} は方形波に近づき, 発振範囲が拡大する事が確かめられた。

8.4 む す び

本章では, 非線形復元力をもつ自励系の平均ポテンシャルによる解析を行った。

まず, 非線形保存系を生成系にもつ自励振動系に平均ポテンシャルの概念を拡張した。そ

の結果、この系では復元力が単項式で表される場合に、平均ポテンシャルの極小点が安定な振動に対応することが示せた。しかし、この場合以外では、平均ポテンシャルの極小点が安定な振動からずれる場合があることがわかった。

次に、硬い発振特性をもつ Duffing-van der Pol 発振を例として、発振限界と生成系の波形の関連を調べた。拡張した平均ポテンシャルを用いて、生成系の波形が方形波に近づけば、発振範囲が広がることを予想し、これを実際に確かめた。

このように、非線形復元力をもつ系では、形式的に拡張した平均ポテンシャルと、平均化方程式の対応は簡単ではなく、平均ポテンシャルの極小点と安定な振動は厳密な意味の対応関係がない。

線形復元力をもつ系において、平均ポテンシャルの勾配系が平均化方程式になるという美しい結果が得られたのは、単に偶然によるものなのか、あるいは、もっと奥の深い理由（例えば、エントロピー生成速度極小定理⁽²⁵⁾との関連）によるものなのか、という疑問については今後の課題である。

9. む す び

本研究では、2端子能動素子により駆動される多自由度LC発振器に生じる広範な振動を、平均ポテンシャルを用いて統一的に解析した。

回路内の損失分（散逸関数）の時間平均を平均ポテンシャルと定義する。従来の平均化方程式は、この勾配系で表現することができた。これにより、平均ポテンシャルは安定な振動において極小値をとるという損失分極小化原理（2章）を示すことができた。この原理は、8章において、非線形復元力を含む系についても、一定の条件の下で拡張できた。

さて、損失分極小化原理に従えば、平均ポテンシャルを構成し、その極小点を求めれば、多自由度発振器に生じる現象を知ることができる。本研究では、非共振の場合と、系内の能動素子が1個の場合の2つの場合を中心に、この原理を用いて、系に生じる振動現象を解析した。

第1に、固有周波数間に特定の関係がない非共振の場合には、平均ポテンシャルの数式表現が簡単となり、解析的な扱いが可能である。能動素子が3次特性（3章）やリミター特性（7章）の場合には、平均ポテンシャルの極小点をすべて求めるアルゴリズムを構成した。また、「多重モード振動の上限則」等の非同期多重モード振動の発生の仕方に関する一般則を示した。さらに、はしご状発振器等の多くの能動素子をもつ発振器の振舞を、1個の能動素子の性質から説明する満場一致原理を示した。そこで、多自由度発振器を理解する上で、1個の能動素子の性質を理解することが、基本的に重要となる。

第2に、系内に能動素子が1個だけ含まれている発振器においては、その素子の平均ポテンシャルを導く平均化操作の解釈を通じて、損失分極小化原理の定性的な扱いが可能である。この扱いにより、非同期多重モード振動の発生機構と、能動素子特性の関係（5章）や、固有周波数が整数比をなす同期振動の発生機構（6章）を、物理的に説明することができた。特に後者の場合には、同期波形の特徴を指適し、多種類の同期振動の分類および系統的な発生に成功した。

5,6章の内容には、数学的には完全でなく、定性的考察に頼っている部分がある。しかし、逆にこのために、能動素子特性が定性的に大きく変らない限り、系に生じる現象も大きな変化をしないことが確信できる。

そこで、7章では、能動素子の特性を定性的に固定し、飽和項の急峻さを変えた場合に、系に生じる現象がどの程度変るかを調べた。その結果、物理的にきれいに説明できた現象については大きな変化は見られなかったが、物理的説明が簡単でない現象は、定性的に大きく

変化しうることがわかった。後者の現象は、所詮、微妙な現象であり、これらの解析には、個々の系に応じて、素子特性、その他の精密なモデル化が必要である。

以上のように、平均ポテンシャル法により、多自由度発振器に生じる現象の統一的、物理的説明が可能になった。

次に、今後の課題をまとめる。

(1) 多重モード振動の上限則の一般化

能動素子特性が3次式(3章)およびリミター特性(7章)の場合に、多重モード振動の上限則を証明することができた。この法則は、さらに一般的な軟発振特性の系に成立するものと考えられる。この法則が成立するか否かを明らかにすることは興味深い。

(2) 共振と非共振の関係

素子特性が3次式等の低次多項式で表される場合、系に生じる内部共振は高々有限個であり、平均ポテンシャルに生じる共振付加項は、表6.1のように分類できた。しかし、実際の素子特性は低次の多項式で表せるものではないので、ほとんど任意の有理比の固有周波数について、内部共振が生じるであろう。だが、内部共振の影響は周波数比によって異なり、複雑な比の内部共振は、非共振現象を大きく変えることはないものと予想される。そこで、共振の影響の強さを表す指標(例えば、平均ポテンシャルに生じる共振付加項の大きさ)を導入し、この大小と共振現象の関係を調べることで、さらにこれを、共振による波形整形と関連付けることは興味深い。

(3) 離調度の問題

2章2.3節で述べたように、不完全な共振が生じ、離調度が0でない場合には、損失分極小化原理はこのままの形では成立しない。本研究では、損失分極小化原理が成立する、離調度が0の場合だけを扱ってきたが、そうでない場合も重要である。

Helmholzの定理⁽²⁶⁾によれば、任意のベクトル場はgradient成分とrotation成分に分解される。2章(2.19)式は、まさに、平均化方程式の表すベクトル場を、抵抗損失分によるgradient成分と、離調度によるrotation成分に分解している。この離調度による項が0でない場合を上手に扱うことは、今後に残された大きな課題である。

(4) 強制振動系への拡張

強制外力を与える電源を、時変の抵抗とみなすことにより、平均ポテンシャルの概念を強制振動系へ拡張することができる。⁽¹¹¹⁾⁽¹¹²⁾⁽¹¹³⁾これより、強制振動系と自励系の平均ポテンシャルの関連が示される。例えば、第3高調波同期、1/3分数調波同期に対する平均ポテンシャルは、周波数比1:3の自励系の平均ポテンシャルから統一的に導くことができる。

(5) 近似解法としての基礎付け

平均ポテンシャル法は、非線形性が弱いという仮定に基づく近似解法である。そこで、平均ポテンシャル法で得られた解と、元の系の解との関連を調べておくことは必要である。⁽²⁷⁾⁽²⁸⁾
この問題について、伊藤による研究が行なわれている。

(6) 変動するバイアスを含む系への拡張

無損失生成系(2.8)式に、固有周波数0の解が現れる場合においても、平均ポテンシャルが適用できるものと考えられる。これにより、キャパシタに蓄えられる電圧によってバイアスを与える発振器のような系に対しても、平均ポテンシャル法が適用される。

(7) 強非線形系への拡張

平均ポテンシャルは、平均化法を用いているため、本来、弱非線形系にしか適用されない。ここで、形式的に解に多数の周波数成分を仮定し、平均ポテンシャルを作ると、ハーモニックバランス法で得られる方程式群を得ることができる。⁽²⁹⁾ただし、解の安定条件と平均ポテンシャルの極小性との関係は、明確な形では明らかにされていない。また、各周波数成分に対して無効電力成分を表す項が生じ、(3)で述べた離調度の問題と関連がある。

(8) 損失分極小化原理の背景

本研究の中心となってきた「損失分極小化原理」は、物理的な直感によく一致する原理である。しかし、8章で述べたように、電圧ポテンシャルの時間平均を損失分と考えたのでは、定常状態においてこれが極小とならない場合があった。生成系が線形で、離調度がない場合に損失分極小化原理が成立するのは、単に偶然によるものなのか、それとも、エントロピー生成速度極小定理⁽²⁵⁾等の、もっと基本的な物理法則によるものなのかを明らかにすることは、今後の大きな課題である。

謝

辞

本研究を御指導頂いた京都大学工学部西川禎一教授に深く御礼申し上げます。また、細部にわたり御討論、御指導下さった倉光正己助手、日頃御激励下さる上田院亮教授にも深謝します。

最適化手法について御教示下さった三宮信夫助教授、御討論下さった木嶋昭教授、井上嘉明助手、奥村浩士助手、8章の拡張のヒントを下さった徳島大学川上博助教授、有益な御討論を頂いた電子通信学会非線形問題研究会の常連各位と京都大学西川研究室の各位にも感謝します。

なお、本研究は、京都大学卒業研究として、田所邦彦氏、中村勉氏、上田博之氏、山下和寿氏、新田博之氏に御協力頂いた。合せて深謝します。

本論文をまとめるにあたり、御配慮頂いた日立製作所機械研究所平井洋武室長にも、感謝します。

1986 年 4 月 11 日

参 考 文 献

- (1) Pol, B. van der : "On Oscillation Hysteresis in a Triode Generator with Two degrees of freedom" *Phil. Mag.*, **43** pp. 770-719 (1922).
- (2) Scott, A. C. : "Tunnel Diode Arrays for Infomation Processing and Strage", *IEEE Trans. System, Man and Cybernetics*, **SMC-1**, pp. 276-275 (1971).
- (3) Endo, T. and Mori, S. : "Mode Analysis of a Multimode Ladder Oscillator", *IEEE Trans.*, **CAS-23**, pp. 100-113 (1976).
- (4) 佐藤, 福井, 野木 : "能動素子を部分装荷したはしご形発振器", 信学論 (電子通信学会論文誌) (A), **J65-A, 2**, pp. 199-200 (昭57-2).
- (5) 倉光, 上田, 今井 : "三個の共振回路をもつ発振器における三重モード振動", 信学技報 (電子通信学会技術研究報告), **NLP76-8** (1976).
- (6) 倉光, 笠原 : "四個の共振回路をもつ発振器における四重モード振動", 信学技報, **NLP77-10** (1977).
- (7) 倉光, 高瀬 : "非線形抵抗結合をもつ発振器における相互同期現象(Ⅱ)", 信学技報, **NLP79-13** (1979).
- (8) Schaffner, J. S. : "Simultaneous Oscillations in Oscillators", *Trans. IRE CT-1*, pp 2-8 (1954)
- (9) ボゴリューボフ, ミトロポリスキー, 益子訳 : "非線型振動論 (漸近的方法)", 共立出版 (1961).
- (10) Brayton, R. K. and Moser, J. K. : "A Theory of nonlinear networks", I, II, *Quart. Appl. Math.*, **22**, pp.81-104 (1964).
- (11) 藤田 : "非線形問題", コロナ社 (1978).
- (12) 刀根 : "数理計画", 朝倉 (1978).
- (13) 倉光, 笠原 : "非線形共振回路をもつ発振器における多重モード振動", 信学技報, **NLP78-8** (1978).
- (14) 一松 : "数値解析", 朝倉 (1982).
- (15) 福井, 佐藤, 野木 : "はしご形発振器のモード成長と安定性", 信学技報,

NLP 80-14 (1980).

- (16) Endo, T. and Mori, S : "Mode Analysis of a Two-Dimensional Low Pass Multimode Oscillator", IEEE Trans., CAS-23, pp. 517-530 (1976).
- (17) Utkin, G. M. : "The Conditions of Stability of Simultaneous Oscillations in Multiple-tuned Oscillatory Systems", Radio Eng. & Electron. Phys., 4, 12, pp. 59-73 (1959).
- (18) 遠藤, 太田 : "発振器の結合系における多重モード発振 —— 5次の非線形特性をもつ場合 ——", 信学論(A), J 61-A, 10, pp. 964-971 (1978).
- (19) 遠藤, 太田 : "5次の非線形特性をもつ発振器の結合系", 信学技報 NLP 77-21 (1978).
- (20) Disman, M. I. and Edson, W. A. : "Simultaneous Asynchronous Oscillations in Class-C Oscillators", Proc. IRE, 46, pp. 895-903 (1958).
- (21) 森口, 宇田川, 一松 : "数学公式", 岩波全書 (1956).
- (22) Stoker, J. J. : "Nonlinear Vibrations.", Interscience publishers, Inc., New York, (1950).
- (23) 今野, 山下 : "非線形計画法", 日科技連 (1978).
- (24) カプチンスキー (関根訳) : "電子回路と振動論", p. 189, 東京図書, (1959).
- (25) 妹尾 : "不可逆過程の熱力学序論", 東京化学同人, (1964).
- (26) 例えば, 先浜 : "微積分", 学術図書 (1976).
- (27) 伊藤 : "非線形回路にあらわれるアトラクターについて", 信学技報, CAS 83-182 (1983).
- (28) 伊藤 : "倉光の定理とそれに関連した問題について", 信学技報, CAS 84-148 (1984).
- (29) 倉光, 横田 : "強非線形 van der Pol 発振器の振動波形について", 信学技報, NLP 84-40 (1985).
- (30) 神力, 森 : "サーミスタ制御発振回路による多重モード発振", 信学技報, NLP 77-2 (1977).

本研究に関する著者の発表

(便宜上文献番号は 100 ～ を使う)

- (101) 倉光, 高瀬 : 「平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法」, 電子通信学会技術研究報告(信学技報) NLP79-38 (1980).
- (102) 倉光, 高瀬, 田所 : 「平均ポテンシャルを用いた格子状結合された発振器群の解析」, 信学技報, NLP 80-2 (1980).
- (103) 倉光, 高瀬 : 「能動素子を部分的に入れたはしご状発振器の平均ポテンシャルによる解析」, 信学技報, NLP 80-20 (1980).
- (104) 倉光, 高瀬 : 「硬い発振特性をもつ多自由度発振器の平均ポテンシャルによる解析」, 信学技報, NLP 81-13 (1981).
- (105) 倉光, 高瀬 : 「多自由度発振器における平均化の意味」, 信学技報, NLP 81-12 (1981).
- (106) 倉光, 高瀬 : 「多自由度発振器における平均化の意味(Ⅱ)— 能動素子特性が複雑な発振器の解析例—」, 信学技報, NLP 81-35 (1982).
- (107) 倉光, 高瀬, 新田, 上田 : 「整数比の固有周波数をもつ多自由度発振器における同期現象—モード同期による波形作用—」, 信学技報, NLP 82-4 (1982).
- (108) 倉光, 高瀬, 新田, 上田 : 「整数比の固有周波数をもつ多自由度発振器における同期現象(Ⅱ)」, 信学技報, NLP 82-15 (1982).
- (109) 倉光, 高瀬, 新田 : 「非線形復元力をもつ自励振動系の平均ポテンシャルによる解析」, 信学技報, NLP 82-30 (1982).
- (110) 倉光, 高瀬, 山下 : 「急峻な飽和特性の能動素子を用いたはしご状発振器の解析」, 信学技報, NLP 82-38 (1983).
- (111) 倉光, 高瀬, 新田 : 「平均ポテンシャルを用いた強制自励系の解析法」, 信学技報, NLP 83-7 (1983).
- (112) 倉光, 高瀬, 新田 : 「平均ポテンシャルを用いた強制自励系の解析法(Ⅱ)— 強制外力をもつ硬い発振器の解析—」, 信学技報, NLP 83-25 (1983).
- (113) 倉光, 高瀬, 新田 : 「平均ポテンシャルを用いた強制自励系の解析法(Ⅲ)— 強制外力をもつ5次軟発振器の解析—」, 信学技報, CAS 83-175 (1983).
- (114) 倉光, 高瀬 : 「平均ポテンシャルを用いた多自由度発振器の解析法」, 電子通信学会論文誌(信学論) A, J 66-A, 4, pp. 336-343 (1983).
- (115) 倉光, 高瀬 : 「平均ポテンシャルを用いたはしご状発振器の解析」, 信学論(A),

J 67-A, 2, pp. 111-118, (1984).

- (116) 高瀬, 倉光 : “分布密度関数を用いた多重モード自励振動の発生機構の説明”, 信学論(A), J 67-A, 10, pp. 966-973 (1984).
- (117) 倉光, 高瀬 : “7次特性の能動素子を用いた多自由度発振器の解析”, 信学論(A), J 67-A, 8, pp. 845-846 (1984).
- (118) 倉光, 高瀬 : “正弦関数の能動素子を用いた多自由度発振器の解析”, 信学論(A), J 67-A, 9, pp. 930-931 (1984).
- (119) 倉光, 高瀬, 新田 : “整数比の固有周波数をもつ発振器における同期現象”, 信学論(A) J 68-A, 9, pp. 827-835 (1985).
- (120) Kuramitsu, M. and Takase, F. : “A New Approach for the Analysis of Multimode Oscillations Based on the Averaged Potential”, Proc. 1981 IEEE ISCAS, 3, pp. 943-946 (1981).
- (121) Kuramitsu, M., Takase, F. and Nitta, H. : “Mode Locking in a Multimode Oscillator with rational Ratio frequencies”, Proc. IEEE 1983 ISCAS, 3, pp. 1153-1156 (1983).
- (122) Kuramitsu, M., Takase, F. and Nitta, H. : “A New Method for the Analysis of Forced Self-Oscillatory Systems using the Averaged Potential” Proc. 1985 IEEE ISCAS, 3, pp. 863-866 (1985).

付 録

- A. 平均ポテンシャルの導出 (2 章)
- B. 多重モード振動の上限則の証明 (3 章)
- C. 非共振平均化の公式 (4 章)
- D. 1 個の能動素子を用いた発振器の一般的性質 (5 章)
〔Ⅰ〕～〔Ⅱ〕の証明
- E. 伝送線路のインピーダンス (6 章)
- F. 定理 2 (7.2.3 節) の証明 (7 章)
- G. 1 個の能動素子をもつ発振器における
多重モード振動の不安定性 (7 章)

付録A 平均ポテンシャルの導出 (2章)

(2.7), (2.12), (2.14), (2.15)式を用いて, (2.16)式右辺より左辺を導く。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r_l} [F(r, \theta, t) + G(r, \theta, t)] \\ &= \sum_{q=1}^K \frac{\partial F}{\partial i_q} \frac{\partial i_q}{\partial r_l} + \sum_{j=1}^J \frac{\partial G}{\partial v_j} \frac{\partial v_j}{\partial r_l} \end{aligned}$$

〔(2.7), (2.12)式を用いて〕

$$\begin{aligned} &= \sum_{q=1}^K \{ -L_q \dot{i}_q + \sum_{j=1}^J \Gamma_{qj} v_j \} d_{lq} \cos \varphi_l \\ &+ \sum_{j=1}^J \{ -C_j \dot{v}_j - \sum_{q=1}^K \Gamma_{qj} i_q \} d'_{lj} \sin \varphi_l \end{aligned}$$

〔(2.15), (2.12)式を代入する。〕

$$\begin{aligned} &= - \sum_q L_q \sum_m d_{mq} (\dot{r}_m \cos \varphi_m - r_m \dot{\varphi}_m \sin \varphi_m) d_{lq} \cos \varphi_l \\ &- \sum_j C_j \sum_m d'_{mj} (\dot{r}_m \sin \varphi_m + r_m \dot{\varphi}_m \cos \varphi_m) d'_{lj} \sin \varphi_l \\ &+ \sum_q \sum_j \Gamma_{qj} \sum_m (d'_{mj} r_m \sin \varphi_m d_{lq} \cos \varphi_l - d_{mq} r_m \cos \varphi_m \cdot d'_{lj} \sin \varphi_l) \end{aligned}$$

〔直交関係 (2.10)式を用いる。〕

$$\begin{aligned} &= - (\dot{r}_l \cos \varphi_l - r_l \dot{\varphi}_l \sin \varphi_l) I_l \cos \varphi_l \\ &- (\dot{r}_l \sin \varphi_l + r_l \dot{\varphi}_l \cos \varphi_l) I_l \sin \varphi_l \\ &+ (n_l r_l \sin \varphi_l \cos \varphi_l - n_l r_l \cos \varphi_l \cdot \sin \varphi_l) \cdot I_l \\ &= - \dot{r}_l I_l \end{aligned}$$

$$\therefore \dot{r}_l = -\frac{1}{I_l} \frac{\partial}{\partial r_l} \{ F + G \}$$

$\dot{\varphi}_l$ についても同様に計算できる。

付録B 多重モード振動の上限則の証明 (3章)

〔 $N_1 \geq m$ の証明〕

対称行列 A の正および負の固有値の個数を各々 p , n とするとき, (p, n) を A の符号数と呼ぶ。 m 重モード振動が安定に生じるとき, A から $(M-m)$ 行, $(M-m)$ 列を取除いて作った小行列 A_m は正定値であり, その符号数は $(m, 0)$ である。行列 A を次のように区分けする。

$$A = \begin{pmatrix} A_m & a \\ a^T & A_{M-m} \end{pmatrix} \quad (\text{B. 1})$$

ただし, A_{M-m} は $(M-m) \times (M-m)$ 対称行列, a は $m \times (M-m)$ 行列である。次の正則行列 P を用いて A を変換する。

$$P = \begin{pmatrix} E_m & -A_m^{-1} a \\ 0 & E_{M-m} \end{pmatrix} \quad (\text{B. 2})$$

ただし, E は単位行列である。

$$P^T A P = \begin{pmatrix} A_m & 0 \\ 0 & A_{M-m} - a^T A_m^{-1} a \end{pmatrix} \quad (\text{B. 3})$$

シルベスターの慣性律より, $P^T A P$ の符号数は, A の符号数 $(N_1, M-N_1)$ に等しい。一方, 「 $P^T A P$ の符号数 = A_m の符号数 $(m, 0) + (A_{M-m} - a^T A_m^{-1} a)$ の符号数」であるから, $N_1 \geq m$ が示せた。

〔 $N_2 \geq N_1$ の証明〕

平均ポテンシャルの2次部分を B と書く。

$$B = \sum_{m=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N \beta_k (2 - \delta_{lm}) P_{mk}^2 P_{lk}^2 R_m R_l \quad (\text{B. 4})$$

ただし, $N = N_i + N_v$ 。また β_k を並べかえて,

$$\begin{aligned} \beta_k &> 0 & (k=1, \dots, N_2) \\ \beta_k &< 0 & (k=N_2+1, \dots, N) \end{aligned} \quad (\text{B. 5})$$

としておく。

ここで, R_m の単一モードの振幅が無限大にならないという物理的要請から, 次式が成立する。

$$\sum_{k=1}^N \beta_k P_{mk}^4 R_m^2 \geq 0 \quad (m=1, \dots, M) \quad (\text{B. 6})$$

さて、2次形式 B の符号数は $(N_1, M - N_1)$ であるから、 B は次式のように書ける。

$$B = \sum_{j=1}^{N_1} \left(\sum_{m=1}^M C_{mj} R_m \right)^2 - \sum_{j=N_1+1}^M \left(\sum_{m=1}^M C_{mj} R_m \right)^2 \quad (\text{B.7})$$

ただし、 C_{mj} は実定数である。ここで $N_2 < N_1$ と仮定すると、 M 個の変数 R_1, \dots, R_M に対する $N_2 - N_1 + M$ ($< M$) 個の連立方程式、

$$\sum_m P_{mk}^2 R_m = 0 \quad (k = 1, \dots, N_2) \quad (\text{B.8})$$

$$\sum_m C_{mj} R_m = 0 \quad (j = N_1 + 1, \dots, M) \quad (\text{B.9})$$

は自明でない解 $\mathbf{R} \neq 0$ をもつ。

このとき、(B.4)(B.5)(B.6)(B.8)式より次式が成立する。

$$\begin{aligned} B = & \sum_{k=1}^{N_2} 2\beta_k \left(\sum_{m=1}^M P_{mk}^2 R_m \right)^2 + \sum_{k=N_2+1}^M 2\beta_k \left(\sum_{m=1}^M P_{mk}^2 R_m \right)^2 \\ & - \sum_{m=1}^M \sum_{k=1}^N \beta_k P_{mk}^4 R_m^2 \\ < 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

一方、(B.7)式に(B.9)式を代入すると $B > 0$ となり矛盾する。したがって $N_2 \geq N_1$ である。 (証了)

付録C 非共振平均化の公式（４章）

x が次式のように正弦波の和からなる場合、 x^{2p} の平均を求める。

$$x = \sum_{m=1}^M r_m \cos(\omega_m t + \theta_m) \quad (C.1)$$

$$\overline{x^{2p}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x^{2p} dt \quad (C.2)$$

ここで、 M 個の周波数 ω_m の間に、簡単な関係のない非共振の場合、(C. 2) 式は次のように書き直せる。

$$\overline{x^{2p}} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^M \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \left[\sum_{m=1}^M r_m \cos \varphi_m \right]^{2p} d\varphi_1 \cdots d\varphi_M \quad (C.3)$$

この平均の結果は、 $R_m = r_m^2$ を用いて次のように書ける。

$$\overline{x^{2p}} = \frac{2^p C_p}{4^p} \sum_{\substack{e_1, \dots, e_M \\ e_1 + \dots + e_M = p}} \left(\frac{p!}{e_1! \cdots e_M!} \right)^2 R_1^{e_1} \cdots R_M^{e_M} \quad (C.4)$$

ただし、和は、 $e_1 + \cdots + e_M = p$ 、 $e_1 \geq 0$ 、 \dots 、 $e_M \geq 0$ なるすべての整数 e_1 、 \dots 、 e_M についてとる。

多項定理 (C. 5) との類似性に注意。

$$(R_1 + \cdots + R_M)^p = \sum_{e_1 + \dots + e_M = p} \left(\frac{p!}{e_1! \cdots e_M!} \right) R_1^{e_1} \cdots R_M^{e_M} \quad (C.5)$$

〔証明〕

(C. 3) 式において、 x^{2p} を多項定理で展開する。

$$\begin{aligned} \overline{x^{2p}} &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^M \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \sum_{q_1 + \dots + q_M = 2p} \frac{(2p)!}{q_1! \cdots q_M!} \\ &\quad r_1^{q_1} \cdots r_M^{q_M} \cos^{q_1} \varphi_1 \cdots \cos^{q_M} \varphi_M d\varphi_1 \cdots d\varphi_M \end{aligned} \quad (C.6)$$

ここで、

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^q \varphi d\varphi = \begin{cases} \frac{2^e C_e}{4^e} & (q = 2e \text{ のとき}) \\ 0 & (q \text{ 奇数のとき}) \end{cases} \quad (C.7)$$

を用いて φ の積分を行う。 $q_m = 2e_m$ についての和をとる。

$$\overline{x^{2p}} = \sum_{e_1 + \dots + e_M = p} \frac{(2p)!}{(2e_1)! \dots (2e_M)!} \frac{2^{e_1} C_{e_1}}{4^{e_1}} \dots \frac{2^{e_M} C_{e_M}}{4^{e_M}} R_1^{e_1} \dots R_M^{e_M} \quad (\text{C. 8})$$

(C. 8)式を整理して、(C. 4)式を得る。

付録D 1 個の能動素子を用いた発振器の一般的性質 〔Ⅰ〕～〔Ⅱ〕の証明 (5 章)

〔Ⅰ〕多重モード振動の安定性の保存則の証明

(証明) M 重モード振動 $r^* = (r_1^*, \dots, r_M^*)$ が安定となる条件は次の 3 つである。

$$(i) \text{ 平衡条件 } \left. \frac{\partial U}{\partial R_j} \right|_{r=r^*} = 0 \quad (j = 1, \dots, M) \quad (D.1)$$

$$(ii) \text{ 抑制条件 } \frac{\partial U}{\partial R_d} > 0 \quad (d = M+1, \dots, M+m) \quad (D.2)$$

(iii) ヘシアン行列 $\partial^2 U / \partial R_i \partial R_j$ ($i, j = 1, \dots, M$) は正定値である。 (D. 3)
 始めの M 自由度系においては, (D. 2) の条件は不要であるが, (D. 2) 式が $(M+m)$ 自由度においても, (D. 1), (D. 3) 式より導かれることを示す。

M 自由度系の平均ポテンシャル U_M において, U_M は r_1 方向に極小である。すなわち,
 $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall r \quad |r - r_1^*| < \varepsilon$ ならば,

$$U_M(r, r_2^*, \dots, r_M^*) \geq U_M(r_1^*, r_2^*, \dots, r_M^*) \quad (D.4)$$

ここで, $\varepsilon > r_d$ なる r_d に対して,

$$|\sqrt{r_1^{*2} + r_d^2 + 2r_1^* r_d \cos \theta} - r_1^*| < \varepsilon \quad (D.5)$$

である。したがって,

$$U_M(\sqrt{r_1^{*2} + r_d^2 + 2r_1^* r_d \cos \theta}, r_2^*, \dots, r_M^*) \geq U_M(r_1^*, r_2^*, \dots, r_M^*) \quad (D.6)$$

(D. 6) 式を同期外れの公式 (5.18) に代入して次式を得る。

$$U_{M+1}(r_1^*, r_2^*, \dots, r_M^*, r_d) \geq U_{M+1}(r_1^*, \dots, r_M^*, 0) \quad (D.7)$$

よって, 抑制条件 (D. 2) 式が成立する。 (証了)

〔Ⅱ〕軟発振特性における 2 重モード振動の禁止則の証明

(証明) $r_1 > 0, r_2 > 0$ に対する平均ポテンシャル U_2 は, 同じ能動素子を用いて作った 1 自由度系の平均ポテンシャル U_1 より, 同期外れの公式 (5.18) を用いて得られる。

$$U_2(r_1, r_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi U_1(\sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2r_1 r_2 \cos \theta}) d\theta \quad (D.8)$$

$A = (r_1 - r_2)^2, B = 4r_1 r_2, \varphi = (\pi - \theta)/2$ と変数変換する。

$$U_2(A, B) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} U_1(\sqrt{A + B \sin \varphi}) d\varphi \quad (D.9)$$

$r_1 > 0, r_2 > 0$ の領域は, $A \geq 0, B > 0$ の領域へ対応する。2 重モード振動の平衡点で

は次式が成立する。

$$\frac{\partial U_2}{\partial A} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial U_1}{\partial r} \bigg|_{r=\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} \frac{1}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi \geq 0 \quad (\text{D.10})$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial B} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\partial U_1}{\partial r} \bigg|_{r=\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} \frac{\sin^2 \varphi}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi = 0 \quad (\text{D.11})$$

(D.11)式より、 $\partial U_1 / \partial r$ は定符号ではありえない。よって、 $r_1 + r_2 > r^* > |r_1 - r_2|$ をみたす r^* に対して次式が成立する。

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} \bigg|_{r=r^*} = 0 \quad (\text{D.12})$$

これは、 $U_1(r)$ に極値があることを示す。もし、 $U_1(r)$ に極大しかなければ、 $r \rightarrow \infty$ とともに U は減少する。これは、発振器の振幅が ∞ に発散することを意味するから物理的にありえない。ゆえに、 $U_1(r)$ には極小点がある。

次に、 $U_1(r)$ の極小点が $0 < r < \infty$ に 1 個しかないとしよう。これを r^* とすると次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_1(r)}{\partial r} &> 0 & (r^* < r) \\ \frac{\partial U_1(r)}{\partial r} &< 0 & (0 < r < r^*) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

$\sin^2 \varphi^* = ((r^*)^2 - A) / B$ と選ぶことにより、

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} \bigg|_{r=\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} > 0 \quad (\varphi^* < \varphi < \pi/2) \quad (\text{D.14})$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} \bigg|_{r=\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} < 0 \quad (0 < \varphi < \varphi^*) \quad (\text{D.15})$$

が成立する。(D.11)、(D.14) 式より次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{\partial U_2}{\partial B} &= \int_0^{\varphi^*} \frac{\partial U_1}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi + \int_{\varphi^*}^{\pi/2} \frac{\partial U_1}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi \\ &> \int_0^{\varphi^*} \frac{\partial U_1}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi^*}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi + \int_{\varphi^*}^{\pi/2} \frac{\partial U_1}{\partial r} \frac{\sin^2 \varphi^*}{2\sqrt{A+B \sin^2 \varphi}} d\varphi \end{aligned}$$

$$= \sin^2 \varphi^* \cdot \frac{\pi}{2} \frac{\partial U_2}{\partial A} \geq 0 \quad (\text{D.16})$$

これは, (D. 10)式に反す。したがって $U_1(r)$ の極小点は $0 \leq r < \infty$ に少なくとも 2 個存在する。

$M=1$ として性質 I を適用すると, この単一モード振動は他のモードを抑制して安定となることがわかる。したがって, この系には, 少なくとも 2 つの振幅の単一モード振動が生じる。

(証了)

付録E 伝送線路のインピーダンス (6章)

図 6.1 の多自由度発振器は、 $M \rightarrow \infty$ のとき、図 6.7 のように、無損失伝送線路の片端に能動素子をつけた回路とみなせることを示す。

図 6.7 の回路において、能動素子端から伝送線路を見たインピーダンスは次式となる。

$$Z(\omega) = j Z_0 \tan \omega T \quad (\text{E. 1})$$

ここに、 Z_0 は特性インピーダンス、 T は信号の片道伝搬時間である。 \tan の部分分数展開の公式^(24, II, p 68)

$$\tan z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2z}{z^2 - \left\{ \frac{2n-1}{2} \pi \right\}^2} \quad (\text{E. 2})$$

を用いることにより、(E. 1) 式は次のように書き換えられる。

$$Z(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{j\omega C_n + \frac{1}{j\omega L_n}} \quad (\text{E. 3})$$

ただし、

$$C_n = \frac{T}{2Z_0}, \quad L_n = \frac{8Z_0 T}{\pi^2 (2n-1)^2} \quad (\text{E. 4})$$

(E. 3) 式の和を M で打ち切れば、(E. 3) 式は、図 6.1 の回路で (6.22) 式の素子値を設定した回路のインピーダンスと一致する。

付録F 定理2 (7.2.3節)の証明 (7章)

LP 1 の孤立解を x_0 とする。 x の要素を入れ換えて、次の可能基底形式に書く。

$$A = (B \ R), \quad x = \begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} x_0^B \\ 0 \end{pmatrix} \quad (F.1)$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x^B \\ x^R \end{pmatrix} \mid Bx^B + Rx^R = b, \ x^B \geq 0, \ x^R \geq 0 \right\} \quad (F.2)$$

基底行列 B は正則ゆえ、 x^B は次のように書ける。

$$x^B = B^{-1}b - B^{-1}Rx^R \quad (F.3)$$

(F.3) 式のもとで、 $f(x) = f(x^B, x^R) = g(x^R)$ と書く。

$$\begin{aligned} \nabla g(x^R) &= \frac{\partial f}{\partial x^R} + \frac{\partial f}{\partial x^B} \frac{\partial x^B}{\partial x^R} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x^R} - \frac{\partial f}{\partial x^B} \cdot B^{-1}R \end{aligned} \quad (F.4)$$

である。LP 1 の目的関数は、(F.3)式を用いて、

$$\nabla f(x_0) \cdot x = \nabla g(0) \cdot x^R + \frac{\partial f}{\partial x^B} \bigg|_{x^B=x_0^B} B^{-1}b \quad (F.5)$$

と書ける。また、領域 F を (F.3) 式のもとに、 x^R に関する等価な領域 G に移す。

$$G = \{ x^R \mid B^{-1}b - B^{-1}Rx^R \geq 0, \ x^R \geq 0 \}$$

第 i 単位ベクトルを e_i と書くとき、 $x_i e_i \in G$ を満たしながら x_i を 0 から増すことのできる添字 i の集合を I とおく。 x_0 が LP 1 の孤立最適解であることより、

$$(\nabla g(0))_i > 0 \quad \forall i \in I$$

である。 $\nabla g(x^R)$ の連続性より、 $\exists \delta_i > 0$ があり、 $\|\theta\| < \delta_i$ を満たす $\forall \theta$ に対し

$$(\nabla g(\theta))_i > 0 \quad \forall i \in I$$

とできる。 $\delta = \min \delta_i$ とおくと、 $\|\theta\| < \delta$ なる $\forall \theta$ に対し、

$$(\nabla g(\theta))_i > 0 \quad \forall i \in I \quad (F.6)$$

となる。ここで、 $\|\theta\| < \delta$ なる $\theta \neq 0 \in G$ を考える。

$$x = \sum_{i \in I} c_i e_i \quad c_i \geq 0, \quad \forall i \in I \quad (F.7)$$

平均値の定理より、 x に対して $0 < \xi < 1$ が存在し、(F.7)式より次式となる。

$$\begin{aligned} g(x) - g(o) &= \nabla g(\xi x) \cdot x \\ &= \sum_{i \in I} c_i \cdot (\nabla g(\xi x))_i \end{aligned} \quad (\text{F.8})$$

$x \neq 0$ より $\exists i \in I$ $c_i > 0$ である。(F.6), (F.8)式より,

$$g(x) > g(o)$$

よって、 $x^R = 0$ は

$$\min g(x^R) \quad x^R \in G$$

の孤立極小解であり、 x_0 は主問題の孤立極小解である。

なお、定理2は、 F 上で C^1 級の関数 $f(x)$ に一般に成立する。 (証了)

付録G 1個の能動素子をもつ発振器における 多重モード振動の不安定性 (7章)

平衡条件 (4.8) 式より次式が成立する。

$$\frac{\partial U}{\partial R_1} = \frac{\partial U}{\partial R_2} = \dots = \frac{\partial U}{\partial R_m} = 0 \quad (\text{G.1})$$

本文 (7.4) 式を用いて次式を得る。

$$\begin{aligned} & \partial U / \partial R_1 - \partial U / \partial R_2 \\ &= A_n \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_m!} \right)^2 (i_1 R_1^{i_1-1} R_2^{i_2} - i_2 R_1^{i_1} R_2^{i_2-1}) R_3^{i_3} \dots R_m^{i_m} \\ &= A_n \sum_{k=0}^n C_k f_k(h) = 0 \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

ただし,

$$C_k = \sum_{\substack{i_3 + \dots + i_m = n-k \\ i_3 \geq 0, \dots, i_m \geq 0}} \left(\frac{n!}{i_3! \dots i_m! \cdot k!} \right)^2 R_3^{i_3} \dots R_m^{i_m} \cdot R_2^{k-1} \quad (\text{G.3})$$

$$R_1 = h \cdot R_2 \quad (\text{G.4})$$

$$f_k(h) = \sum_{i=1}^k {}_k C_i^2 \{ i h^{i-1} - (k-i) h^i \} \quad (\text{G.5})$$

とおいた。

$f_k(h)$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} f_k(h) &= \sum_{i=1}^{k-1} {}_k C_i \cdot {}_k C_{i+1} (k-1-2i) h^i \\ &= \sum_{i=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} {}_k C_i \cdot {}_k C_{i+1} (k-1-2i) h^i (1 - h^{k-1-2i}) \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

(G.6) 式より次が成立する。

$$\begin{aligned} f_k(h) &> 0 & 0 < h < 1 \\ f_k(h) &= 0 & h = 1 \\ f_k(h) &< 0 & 1 < h \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

$C_k > 0$ であるから, (G.2) 式より $h=1$ である。したがって, $R_1 = R_2 = R$ である。同様にし
て, m 重モード振動の各周波数成分は等振幅 ($R_i = R_j \equiv R$) となる。

次に正定値条件 (4.10) が成立しない事を示す。(7.4) 式より

$$U_{11} = \partial^2 U / \partial R_1^2 |_{R^*} = A_n \sum_{i_1, \dots, i_m} i_1 (i_1 - 1) \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_m!} \right)^2 R^{n-2} \\ = U_{22} \quad (G.8)$$

$$U_{12} = \partial^2 U / \partial R_1 \partial R_2 |_{R^*} = A_n \sum_{i_1, \dots, i_m} i_1 i_2 \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_m!} \right)^2 R^{n-2} \quad (G.9)$$

(G.8), (G.9) 式より次式が成立する。

$$U_{12} - \frac{U_{11} + U_{22}}{2} = A_n \sum_{i_1 + \dots + i_m = n} \left(\frac{n!}{i_1! \dots i_m!} \right)^2 i_1 (i_2 - i_1 + 1) R^{n-2} \\ = A_n \sum_{k=0}^n \sum_{i_3 + \dots + i_m = n-k} \left(\frac{n!}{i_3! \dots i_m! k!} \right)^2 \sum_{i=0}^k {}_k C_i^2 i (k + 1 - 2i) R^{n-2} \\ = A_n \sum_{k=0}^n \sum_{i_3 + \dots + i_m = n-k} \left(\frac{n!}{i_3! \dots i_m! k!} \right)^2 (k-1) {}_{2k-2} C_{k-1} R^{n-2} \\ > 0 \quad (G.10)$$

したがって,

$$U_{12} > \frac{U_{11} + U_{22}}{2} \geq \sqrt{U_{11} \cdot U_{22}} \quad (G.11)$$

となり, 正定値条件 (4.10) は成立しない。(証了)